

ANNALEN DER PHYSIK

FOLGE, BAND 17, HEFT 8, AUGUST 1933

Beugungserscheinungen an kleinen Kugeln in der Nähe von Brennpunkten konvergenter Kugelwellen

Von Friedrich Möglich

(Mit 3 Figuren)

Durch Mies Theorie¹⁾ der Farben in kolloidalen Lösungen hat die Frage nach dem Grunde dieser auffälligen Erscheinungen eine bis zu einem gewissen Grade befriedigende Beantwortung gefunden, wenigstens für stark verdünnte Lösungen. Doch weichen bei stärker konzentrierten Lösungen die Farben erheblich von denen ab, die man nach dieser Theorie erwarten müßte. Dies hat natürlich seinen plausiblen Grund in der Vernachlässigung der Wechselwirkung der einzelnen Teilchen in Mies Theorie.²⁾ Will man diese berücksichtigen, so hat man von vornherein keine ebenen Wellen als einfallend anzunehmen, sondern muß einen komplizierteren einfallenden Zustand zugrunde legen. Die Durchführung der Mieschen Theorie bei Benutzung eines solchen ist aber recht schwer und bisher noch nicht versucht worden. Wir werden im folgenden der Lösung dieser Aufgabe näher kommen, indem wir zunächst einen spezielleren Lichtzustand als einfallend annehmen: den eines konvergenten Bündels. Die Durchführung eines noch allgemeineren Zustandes ist theoretisch nicht schwieriger als das, was im folgenden gemacht wird. Es ist auch ohne weiteres zu sehen, wie die Theorie für einen ganz beliebigen einfallenden Lichtzustand durchzuführen ist, ohne daß dies noch einmal ausdrücklich bemerkt zu werden braucht.

Wir haben uns gerade deshalb auf den Zustand eines konvergenten Bündels spezialisiert, weil es uns wünschenswert erschien, im Hinblick auf die Untersuchungen mit dem Ultramikroskop, zu berechnen, wie die durch eine ebene Welle hervorgerufenen Erscheinungen sich ändern, wenn der einfallende Zustand nicht mehr eine ebene Welle ist, sondern durch ein optisches Linsensystem auf das beugende Teilchen

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. S. 377. 1908.

2) Vgl. auch die Literaturangaben in Mies Arbeit.

konzentriert wird. Es ergibt sich dabei, daß die Erscheinungen nicht wesentlich anders sind als bei einer ebenen Welle, wenn der Öffnungswinkel kleiner als 60° ist, oder wenn die beugende Kugel sehr weit vom Brennpunkt des Bündels entfernt ist (aber doch innerhalb des Bündels liegt). Hingegen werden die anzubringenden Modifikationen wesentlich in der Nähe des Brennpunktes, wie dies ja auch zu erwarten ist. Für spezielle Fälle haben wir die Änderungen graphisch veranschaulicht. Einige Tabellen, die die Werte gewisser im Endresultat auftretenden Größen enthalten, mögen dazu dienen, auch die nicht näher berücksichtigten Einzelheiten unschwer zu berechnen. Eine vollständige Darstellung aller feineren Züge erschien unzweckmäßig, da bei der verhältnismäßig großen Anzahl der verfügbaren Parameter eine erschöpfende Darstellung sehr viel Raum beanspruchen würde. Einen gewissen Ersatz hierfür glauben wir in den publizierten Tabellen erblicken zu dürfen.

§ 1. Die Potentiale für das elektromagnetische Feld

Die Aufgabe, die in dieser Arbeit gelöst werden soll, läßt sich am besten folgendermaßen darstellen: ein kugelförmiges Teilchen befinde sich in der Nähe des Brennpunktes einer konvergierenden Kugelwelle. Welcher Art sind die Beugungserscheinungen, die von diesem Teilchen hervorgerufen werden? Wie hängen sie von der Größe und der Lage des Teilchens relativ zum Brennpunkte ab? Wie ist der Einfluß des Öffnungswinkels des Bündels?

Der Mittelpunkt der Kugel ist der Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, dessen z -Achse parallel zur Achse des konvergenten Bündels ist. x_1, y_1, z_1 seien die Koordinaten des Brennpunktes des konvergierenden Bündels. Ein möglicher Lichtzustand läßt sich, wie Debye¹⁾ gezeigt hat, durch eine Komponente des Hertzschen Vektors in folgender Weise ausdrücken:

$$(1) \quad \mathfrak{P}_z = \frac{ik}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ik[\cos\varphi_0(z-z_1) + \sin\varphi_0 \cos\varphi_0(x-x_1) + \sin\varphi_0 \sin\varphi_0(y-y_1)]} \sin\vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0$$

(α ist der Winkel, den die Erzeugende des Lichtkegels mit der Mittelachse bildet). Nun führen wir Polarkoordinaten ein. Wir setzen:

$$(2) \quad x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

1) P. Debye, *Ann. d. Phys.* 30. S. 755. 1909. Vgl. auch *Handb. d. phys. Optik I*, S. 557, Verlag: J. A. Barth, Leipzig.

Diese Polarkoordinaten beziehen sich auf den Kugelmittelpunkt als Nullpunkt, während sich die Integrationsvariablen ϑ_0, φ_0 auf den Brennpunkt als Nullpunkt beziehen. Um für die x_1, y_1, z_1 (Koordinaten des Brennpunktes in bezug auf die Kugel) Polarkoordinaten einzuführen, kann man in verschiedener Weise vorgehen. Man kann z. B. in analoger Weise zu (2) Koordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ einführen, die sich auf den Mittelpunkt der Kugel als Nullpunkt beziehen und angeben, in welcher Richtung und Entfernung der Brennpunkt vom Mittelpunkt der Kugel aus liegt. Doch ist es angemessener, $-x_1, -y_1, -z_1$ umgekehrt als Koordinaten des Kugelmittelpunktes in bezug auf den Brennpunkt zu betrachten. Diesen Koordinaten sollen Polarkoordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ entsprechen, die sich auf den Brennpunkt als Nullpunkt beziehen:

$$(3) \quad -x_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1; \quad -y_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1; \quad -z_1 = r_1 \cos \vartheta_1.$$

Es sind also $\vartheta_0, \varphi_0, \vartheta_1, \varphi_1$ Polarkoordinaten mit den Nullpunkten im Brennpunkt, ϑ, φ aber mit dem Nullpunkt im Mittelpunkt der Kugel.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{ik}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \gamma} \cdot e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} d\Omega_0,$$

wo

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos (\varphi - \varphi_0); \\ \cos \tilde{\gamma} = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_0 \cos (\varphi_1 - \varphi_0); \\ d\Omega_0 = \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{cases}$$

bedeuten. Die mit dem Index 0 bezeichneten sind die Integrationsvariablen.

Wir drücken nunmehr die Feldstärken \mathfrak{E} und \mathfrak{H} durch den Hertzschen Vektor aus und gehen dabei gleichzeitig zur Darstellung der Vektoren in Polarkoordinaten über. Wir benutzen dazu die folgenden Beziehungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathfrak{E}_z \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_\vartheta = \mathfrak{E}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{E}_z \sin \vartheta, \\ \mathfrak{E}_\varphi = -\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi. \end{cases}$$

Die Umrechnungsformeln, die die Feldstärken mit dem Hertzschen Vektor verknüpfen, lassen sich bekannterweise in diese vektorielle Form bringen:

$$\mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P}; \quad \mathfrak{H} = ik \text{ rot } \mathfrak{P}.$$

Für den durch Gl. (1) von uns gewählten speziellen Polarisationszustand ist dann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x^2} + k^2 \mathfrak{P}_x; & \mathfrak{E}_y &= \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial y}; & \mathfrak{E}_z &= \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial z}, \\ \mathfrak{H}_x &= 0; & \mathfrak{H}_y &= i k \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial z}; & \mathfrak{H}_z &= -i k \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y}.\end{aligned}$$

Daraus dann für Polarkoordinaten:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x^2} + k^2 \mathfrak{P}_x \right) \\ &\quad + \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial y} + \cos \vartheta \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial z}, \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= \cos \vartheta \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x^2} + k^2 \mathfrak{P}_x \right) \\ &\quad + \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial y} - \sin \vartheta \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial z}, \\ \mathfrak{E}_\varphi &= -\sin \varphi \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x^2} + k^2 \mathfrak{P}_x \right) + \cos \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_x}{\partial x \partial y}, \\ \mathfrak{H}_r &= i k \left(\sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial z} - \cos \vartheta \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} \right), \\ \mathfrak{H}_\vartheta &= i k \left(\cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial z} + \sin \vartheta \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} \right), \\ \mathfrak{H}_\varphi &= i k \left(\cos \varphi \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial z} \right),\end{aligned}\right.$$

wenn wir uns auf zeitlich periodische Zustände beschränken (Abspaltung des komplexen Zeitfaktors $e^{i\omega t}$).

Die Maxwell'schen Gleichungen schreiben sich in Polarkoordinaten:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned}\frac{\sigma + i\epsilon\omega}{c} \mathfrak{E}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathfrak{H}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathfrak{H}_\vartheta) \right], \\ \frac{\sigma + i\epsilon\omega}{c} \mathfrak{E}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathfrak{H}_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \mathfrak{H}_\varphi) \right], \\ \frac{\sigma + i\epsilon\omega}{c} \mathfrak{E}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathfrak{H}_r) \right], \\ -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathfrak{E}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathfrak{E}_\vartheta) \right], \\ -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathfrak{E}_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \mathfrak{E}_\varphi) \right], \\ -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{E}_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathfrak{E}_r) \right].\end{aligned}\right.$$

Daraus läßt sich für \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r eine Differentialgleichung¹⁾ herstellen. Man geht dabei so vor, daß man in der ersten

1) G. Mie, a. a. O.

der sechs Maxwell'schen Gleichungen die Größen \mathfrak{H}_φ und \mathfrak{H}_θ durch \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_θ und \mathfrak{E}_φ ersetzt und dann mit Hilfe der Divergenzbedingung für \mathfrak{E} und \mathfrak{H} eliminiert. Die Divergenzbedingung¹⁾ für Polarkoordinaten lautet:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta \mathfrak{A}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathfrak{A}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathfrak{A}_\varphi) \right\}.$$

So ergibt sich:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} -k^2 \mathfrak{E}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \mathfrak{E}_r)}{\partial r^2} \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \right.$$

wo $k^2 = -\frac{i\omega}{c} \frac{(\sigma + i s \omega)}{c}$. Dieselbe Gleichung gilt für \mathfrak{H}_r .

Nach Mie und Debye²⁾ läßt sich das elektromagnetische Feld in zwei Teilfelder aufspalten, von denen jedes aus einem skalaren Potential abgeleitet werden kann. Das erste Teilfeld ist dadurch charakterisiert, daß \mathfrak{H}_r verschwindet. Im zweiten Teilfeld ist $\mathfrak{E}_r = 0$. Aus der vierten der Maxwell'schen Gl. (7) ergibt sich nämlich für das erste Teilfeld ($\mathfrak{H}_r = 0$):

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathfrak{E}_\varphi^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathfrak{E}_\theta^{(1)}).$$

(Die beiden Teilfelder sind durch obere Indizes ⁽¹⁾ und ⁽²⁾ gekennzeichnet.) Gl. (9) wird identisch erfüllt, wenn wir setzen:

$$(10) \quad \mathfrak{E}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (r \Pi^{(1)})}{\partial \varphi \partial r}; \quad \mathfrak{E}_\theta^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi^{(1)})}{\partial \vartheta \partial r}.$$

Zunächst wäre es nur nötig

$$\mathfrak{E}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Z}{\partial \varphi}; \quad \mathfrak{E}_\theta^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta}$$

zu setzen; doch empfiehlt sich die Darstellung (10), um alles Folgende ohne weitere Zwischenrechnungen darstellen zu können (vgl. auch die Originalarbeit von Debye). Setzen wir jetzt den in Gl. (10) für \mathfrak{E}_φ gegebenen Ausdruck in die zweite der Gl. (7) ein und beachten, daß für das erste Teilfeld $\mathfrak{H}_r = 0$ gilt, so ergibt sich daraus für $\mathfrak{H}_\varphi^{(1)}$:

$$\mathfrak{H}_\varphi^{(1)} = -\frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi^{(1)})}{\partial \vartheta}.$$

Analog für $\mathfrak{H}_\theta^{(1)}$:

$$\mathfrak{H}_\theta^{(1)} = \frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi^{(1)}}{\partial \varphi}.$$

¹⁾ Vgl. z. B. J. Spielrein, Lehrbuch d. Vektorrechn., Stuttgart 1916, S. 175.

²⁾ G. Mie, a. a. O.; P. Debye, a. a. O. Die Einführung der Potentiale verdanken wir Debye.

Diese beiden Ausdrücke setzen wir nun in die erste der Gl. (7) ein zur Bestimmung von $\mathfrak{E}_r^{(1)}$:

$$(11) \quad \mathfrak{E}_r^{(1)} = -\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial r \Pi^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Die einzigen Gleichungen, die wir zur Bestimmung von $\Pi^{(1)}$ nicht benutzt haben, sind die fünfte und die sechste der Gl. (7). Setzen wir in diese die bisher gefundenen Größen ein, so erhalten wir aus beiden Gleichungen übereinstimmend eine und dieselbe Differentialgleichung für $\Pi^{(1)}$. Es ergibt sich:

$$(12) \quad \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial r \Pi^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 \Pi^{(1)} = 0. \right.$$

Diese Gleichung mit der Gl. (11) kombiniert, ergibt für $\mathfrak{E}_r^{(1)}$:

$$\mathfrak{E}_r^{(1)} = \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial r^2} + k^2 r \Pi^{(1)}.$$

Ganz Analoges gilt für das zweite Teilfeld. Wir können so insgesamt aus den Potentialen $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ die Feldstärken der beiden Teilfelder durch folgende Ausdrücke darstellen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{E}_r^{(1)} = \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial r^2} + k^2 r \Pi^{(1)}, & \mathfrak{E}_r^{(2)} = \frac{\partial^2 r \Pi^{(2)}}{\partial r^2} + k^2 r \Pi^{(2)}, \\ \mathfrak{E}_\vartheta^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial r \partial \vartheta}, & \mathfrak{E}_\vartheta^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi^{(2)}}{\partial r \partial \vartheta}, \\ \mathfrak{E}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi^{(1)}}{\partial r \partial \varphi}, & \mathfrak{E}_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi^{(2)}}{\partial r \partial \varphi}, \\ \mathfrak{H}_r^{(1)} = 0, & \mathfrak{H}_r^{(2)} = 0, \\ \mathfrak{H}_\vartheta^{(1)} = \frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi^{(1)}}{\partial \varphi}, & \mathfrak{H}_\vartheta^{(2)} = -\frac{i \omega}{c} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi^{(2)}}{\partial \varphi}, \\ \mathfrak{H}_\varphi^{(1)} = -\frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial r \Pi^{(1)}}{\partial \vartheta}, & \mathfrak{H}_\varphi^{(2)} = \frac{i \omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial r \Pi^{(2)}}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

§ 2. Die Reihenentwicklungen für die Feldstärken

Wir haben uns nunmehr mit den Integralen der Differentialgleichung (12) zu beschäftigen. Der Ansatz $R \cdot \Theta \cdot \Phi$ für Π , wo R nur von r , Θ nur von ϑ und Φ nur von φ abhängt, führt für die Funktionen R , Θ , Φ auf folgende lineare Differentialgleichungen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{d^2 r R}{d r^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) r R = 0, \\ \text{b) } \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d \Theta}{d \vartheta} \right) + \left[\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0, \\ \text{c) } \frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + \beta \Phi = 0. \end{array} \right.$$

Die dritte hat zu Integralen die trigonometrischen Funktionen, und die Forderung der Eindeutigkeit im Raume legt den Wert der Konstanten β insofern fest, als nur Quadrate ganzer Zahlen für sie in Frage kommen. Die Gleichung für Θ ist die der Zugeordneten der Kugelfunktionen, wenn wir α gleich $n(n+1)$ setzen, wo n eine ganze Zahl ist. Die Wahl der Konstanten in der Art, wie wir sie durchgeführt haben, ist notwendig, weil anders überall endliche Lösungen der Differentialgleichung nicht existieren. Damit ist die Bestimmung der Konstanten auch für die Differentialgleichung für R durchgeführt.

Setzen wir

$$R\sqrt{r} = \varphi, \quad kr = \varrho,$$

so ergibt sich eine Differentialgleichung für φ

$$\frac{d^2 \varphi}{d \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d \varphi}{d \varrho} + \left[1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\varrho^2} \right] \varphi = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Zylinderfunktionen der Ordnung $n + \frac{1}{2}$. Zwei linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung (14a) sind dann z. B.:

$$rR = \sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \quad rR = \sqrt{kr} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr).$$

Es ist für das Folgende notwendig, ein anderes Fundamentalsystem einzuführen; wir benutzen:

$$\psi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

$$(15) \quad \Psi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}(kr) - e^{i \frac{(2n+1)\pi}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) \right\}.$$

Die Funktionen Ψ gehen nämlich asymptotisch für große Werte von r in e^{-ikr} über.¹⁾ Sie sind geeignet, um vom Brennpunkt wegeilende Wellen darzustellen. Die Zylinderfunktionen $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ und $J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$ lassen sich beide durch die bekannte Reihe

1) Diese Kombination entspricht genau der Wahl der sogenannten Hankelschen Funktionen der zweiten Art. Vgl. G. N. Watson, Treatise on Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

darstellen, wenn wir nur ν durch $n + \frac{1}{2}$ bzw. $-n - \frac{1}{2}$ ersetzen. Hier, wo ν nicht mehr ganzzahlig ist, fällt die bekannte Entartungsschwierigkeit fort.

Die Integrale der Gl. (14b) sind, wie wir hier unter Hinweis auf die Literatur ohne nähere Erläuterung als bekannt¹⁾ voraussetzen, die Kugelfunktionen sowie deren Zugeordnete, die wir in der Weise definieren wollen:

$$(16) P_n^\nu(u) = \sqrt{1-u^2}^\nu \frac{d^\nu P_n(u)}{du^\nu}; \quad P_n(u) = \text{zonale Kugelfunkt.}$$

Die Gl. (14c) hat zu Integralen, wie schon bemerkt, die trigonometrischen Funktionen.

Spezielle Integrale der Differentialgleichung (12) sind also:

$$\frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^\nu(\cos \vartheta) \frac{\cos^\nu \varphi}{\sin^\nu \varphi}$$

oder

$$\frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^\nu(\cos \vartheta) \frac{\cos^\nu \varphi}{\sin^\nu \varphi}.$$

Die allgemeinen Integrale werden sich daher als Summen von solchen einzelnen Ausdrücken darstellen lassen. Wir werden daher zu erwarten haben, daß die Potentiale Π sich durch die folgenden Reihen darstellen lassen werden:

$$(17) \quad \sum_{n,m} \frac{E_{n,m}}{\tilde{E}_{n,m}} \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos^m \varphi}{\sin^m \varphi},$$

$$(18) \quad \sum_{n,m} \frac{B_{n,m}}{\tilde{B}_{n,m}} \frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos^m \varphi}{\sin^m \varphi}.$$

Die Aufgabe, die wir zunächst zu erledigen haben, ist die folgende: Mit Hilfe des Hertzschen Vektors haben wir die Feldstärken \mathcal{E}_r und \mathcal{H}_r für das konvergente Bündel dargestellt [Gl. (6) in Verbindung mit (1)]. Diese Feldstärken erscheinen als Integraldarstellungen. Wie finden wir nun aus ihnen die Potentiale Π in Reihenform (17) oder (18)?

Wir führen diese Aufgabe in zwei Schritten durch. Der erste Schritt wird darin bestehen, daß wir die Komponenten \mathcal{E}_r und \mathcal{H}_r in Reihen entwickeln, die nach Kugelflächenfunktionen fortschreiten; der zweite Schritt darin, daß wir diese ge-

1) Z. B. E. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, I.

fundenen Reihenentwicklungen in die erste der Differentialgleichungen (14) einsetzen und die Koeffizienten gleicher Kugelflächenfunktionen gleichzusetzen. Diese Operation gibt eine unendliche Folge inhomogener Differentialgleichung in r , die sich leicht lösen lassen und die die Entwicklungskoeffizienten für die Funktionen Π festlegen, sobald die Reihenentwicklungskoeffizienten für \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r berechnet sind.

Wir beginnen, für die Komponenten \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r die nach Kugelflächenfunktionen fortschreitenden Reihenentwicklungen aufzustellen. Zunächst geben wir die Integraldarstellung der Komponenten \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r , wie sie sich aus dem Debyeschen Ansatz Gl. (1) mit Hilfe der Gl. (6) ergibt:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_r &= \frac{(ik)^3}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \sin \varphi e^{ikr \cos \gamma} \cdot e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \cdot \cos \vartheta_0 d\Omega_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \vartheta e^{ikr \cos \gamma} \cdot e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \cdot \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 d\Omega_0 \right\}, \\ \mathfrak{E}_r &= \frac{(ik)^3}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 e^{ikr \cos \gamma} \cdot e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \cdot \cos \gamma d\Omega_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos \gamma} \cdot e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \cdot \sin \vartheta \cos \varphi d\Omega_0 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Zur Darstellung der Reihenentwicklungen nach Kugelflächenfunktionen hat man zu beachten, daß die Komponenten \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r als Funktionen der Polarkoordinaten der Differentialgleichung (8) genügen. Sie läßt in gleicher Weise integrieren wie die Differentialgleichung (12) für die Potentiale Π . Der Ansatz $\tilde{R} \cdot \Theta \cdot \Phi$ führt auf drei lineare gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen \tilde{R} , Θ , Φ . Die Differentialgleichungen für Θ und Φ sind die gleichen wie (14b) und (14c). An Stelle von (14a) tritt die folgende:

$$(20) \quad \frac{d^2 r^2 \tilde{R}}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) r^2 \tilde{R} = 0.$$

Ihre Lösungen sind, wie durch Vergleichung mit der Differentialgleichung (14a) leicht festgestellt werden kann, die Funktionen $\frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}$ oder $\frac{\Psi_n(kr)}{(kr)^2}$. Daher haben wir also

das Ergebnis, daß die Reihenentwicklungen von \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r folgende Form haben:

$$\mathfrak{E}_r = \sum_n \sum_m \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m\varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m\varphi\},$$

$$\mathfrak{H}_r = \sum_n \sum_m \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} P_n^m(\cos \vartheta) \{b_{n,m} \cos m\varphi + \tilde{b}_{n,m} \sin m\varphi\}.$$

Die Reihenentwicklungen mit den Funktionen $\frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}$ fallen fort, da die darzustellenden Feldstärken \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r überall endlich sind, die Funktionen $\frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}$ aber im Nullpunkt einen Pol haben.

Die wesentliche Aufgabe ist daher noch, die numerischen Koeffizienten auszurechnen. Wir beginnen die Durchführung der Rechnung für \mathfrak{H}_r .

Die Koeffizienten der Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen für beliebige Funktionen $F(\vartheta, \varphi)$ erhält man bekanntlich durch folgendes Integral:

$$F_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} d\Omega,$$

$$F_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) d\Omega.$$

Dies auf \mathfrak{H}_r angewandt, ergibt für die Koeffizienten der cos-Entwicklung folgende Beziehung:

$$(21) \quad b_{n,m} \cdot \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_r \cdot P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi d\Omega.$$

Daß der Entwicklungskoeffizient in der Kugelfunktionsreihe für \mathfrak{H}_r in seiner Abhängigkeit von r wirklich die Form

$$b_{n,m} \cdot \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}$$

haben muß, ergibt sich aus den Differentialgleichungen (8) und (20). Setzen wir nun für \mathfrak{H}_r das oben gefundene Integral Gl. (19) ein, so erhalten wir folgende vierfachen Integrale:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \frac{b_{n,m} \cdot \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}}{\text{const}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \cos \vartheta_0 \\ &\cdot \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \sin \varphi e^{ikr \cos \gamma} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi d\Omega \right) d\Omega_0 \\ &- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 e^{ikr_1 \cos \tilde{\gamma}} \\ &\cdot \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \vartheta e^{ikr \cos \gamma} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi d\Omega \right) d\Omega_0, \end{aligned} \right.$$

wobei wir schon von der Erlaubnis der Umkehrung der Integrationsfolge Gebrauch gemacht haben. Zur Berechnung der inneren Integrale benutzen wir die folgenden Formeln¹⁾

$$(23) \left\{ \begin{aligned} &\sin \vartheta \sin \varphi P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi \\ &= \alpha (P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta)) \cos(m+1) \varphi \\ &+ (\beta P_{n-1}^{m-1}(\cos \vartheta) + \gamma P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta)) \sin(m-1) \varphi, \end{aligned} \right.$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{2(2n+1)}, \quad \beta = \frac{-(n+m-1)(n+m)}{2(2n+1)},$$

$$\gamma = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2(2n+1)}$$

bedeuten; ferner die Gleichung

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \cos \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2n+1} ((n-m+1) P_{n+1}^m(\cos \vartheta) \\ &+ (n+m) P_{n-1}^m(\cos \vartheta)). \end{aligned} \right.$$

Dann setze man die bekannte Entwicklung an:

$$(25) \quad e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n(\cos \gamma)$$

und beachte das Additionstheorem²⁾:

1) Diese Gleichungen folgen aus gewissen Beziehungen, die von F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, in großer Zahl abgeleitet worden sind.

2) Vgl. E. T. Whittaker u. G. N. Watson, A Course of modern Analysis, Cambridge 1920.

$$(26) \quad \begin{cases} P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0). \end{cases}$$

Wir können nun die innere Integration leicht ausführen, wenn wir noch die Orthogonalitätseigenschaften der Kugelflächenfunktionen beachten:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Für das erste innere Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4\pi \alpha \left[i^{n+1} P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} \right. \\ \left. - i^{n-1} P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} \right] \sin(m+1)\varphi_0 \\ + 4\pi \gamma i^{n+1} \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin(m-1)\varphi_0 \\ + 4\pi \beta i^{n-1} \frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} P_{n-1}^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin(m-1)\varphi_0, \end{aligned}$$

während sich für das zweite ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{2n+1} i^{n+1} \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} (n-m+1) P_{n+1}^m(\cos \vartheta_0) \cos m\varphi_0 \\ + \frac{4\pi}{2n+1} i^{n-1} \frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} (n+m) P_{n-1}^m(\cos \vartheta_0) \cos m\varphi_0. \end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt eine Rekursionsformel, die drei ψ -Funktionen verschiedener Ordnung miteinander verknüpft. Diese Rekursionsformel folgt mühelos aus der analogen für die Zylinderfunktionen, wenn man die nahe Verwandtschaft der Zylinderfunktionen und der ψ -Funktionen berücksichtigt [vgl. Gl. (15)].

Diese Rekursionsformel lautet:

$$(2n+1) \frac{\psi_n(kr)}{kr} = \psi_{n-1}(kr) + \psi_{n+1}(kr).$$

Mit ihrer Hilfe schreiben wir die linke Seite der Gl. (22) in folgender Form:

$$\frac{b_{n,m}}{\text{const} \cdot (2n+1)} \left(\frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} + \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} \right),$$

während sich die rechte Seite durch Zusammenfassung auf die gleiche Form bringen läßt:

$$\underbrace{\left[\frac{b_{n,m}}{\text{const}(2n+1)} \left(\frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} + \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} \right) \right.}_{(27)} = 4\pi \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} \left\{ \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \sin(m+1) \varphi_0 d\Omega_0 \right. \\
 + \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \sin(m-1) \varphi_0 d\Omega_0 \\
 \left. - \frac{(n-m+1)}{2n+1} \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_{n+1}^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos m \varphi_0 d\Omega_0 \right\} \\
 + 4\pi \frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} \left\{ -\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \sin(m+1) \varphi_0 d\Omega_0 \right. \\
 + \beta \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_{n-1}^{m-1}(\cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \sin(m-1) \varphi_0 d\Omega_0 \\
 \left. - \frac{(n+m)}{2n+1} \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \vartheta} P_{n-1}^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos m \varphi_0 d\Omega_0 \right\}.$$

Jetzt ist noch der Nachweis zu führen, daß die Koeffizienten von $\frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr}$ und $\frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr}$ einander gleich sind, wie es die linke Seite verlangt. Dann geben diese den Wert von

$$\frac{b_{n,m}}{\text{const } 4\pi(2n+1)}.$$

Wir schreiten jetzt zur Auswertung dieser Integralkoeffizienten, und beachten dazu:

$$e^{ikr_1 \cos \varphi} = e^{-ikx_1 \cos \varphi_0} \times e^{-ik \sin \varphi_0 (x_1 \cos \varphi_0 + y_1 \sin \varphi_0)}.$$

— x_1 und — y_1 ersetzen wir wieder nach (3), indem wir abkürzen:

$$(28) \quad r_1 \sin \vartheta_1 = \varrho.$$

Dann ergibt sich:

$$(29) \quad -x_1 = \varrho \cos \varphi_1; \quad -y_1 = \varrho \sin \varphi_1.$$

Dann wird

$$e^{ik \varrho \sin \vartheta_0 (\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_1)} = e^{ik \varrho \sin \vartheta_0 \cos (\varphi_1 - \varphi_0)}.$$

Hier benutzen wir die Reihenentwicklung nach Zylinderfunktionen:

$$(30) \quad \begin{cases} e^{ik \varrho \sin \vartheta_0 \cos (\varphi_1 - \varphi_0)} = J_0(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ \quad + 2 \sum_{p=1}^{\infty} i^p J_p(k \varrho \sin \vartheta_0) \cos p(\varphi_1 - \varphi_0). \end{cases}$$

Als Beispiel berechnen wir von den in Gl. (27) auftretenden Integralen das folgende

$$\int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \varphi} P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \sin(m+1) \varphi_0 d\Omega_0.$$

Unter Benutzung der Formel (30) ergibt sich¹⁾:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{p=0}^{\infty} i^p \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{-ikx_1 \cos \varphi_0} J_p(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ & \cdot \left[\frac{1}{2n+3} (n-m+1) P_{n+2}^{m+1}(\cos \vartheta_0) + (n+m+2) P_n^{m+1}(\cos \vartheta_0) \right] \\ & \cdot \cos p(\varphi_1 - \varphi_0) \sin(m+1) \varphi_0 d\Omega_0. \end{aligned}$$

1) Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß für $p=0$ der Summand mit $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren ist.

Wegen der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen gibt nur das Integral mit $p = m + 1$ einen von Null verschiedenen Wert, nämlich:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi i^{m+1} \sin(m+1) \varphi_1 \frac{(n-m+1)}{2n+3} \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\
 & \quad \cdot J_{m+1}(k\rho \sin \vartheta_0) P_{n+2}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\
 & + 2\pi i^{m+1} \sin(m+1) \varphi_1 \frac{(n+m+2)}{2n+3} \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\
 & \quad \cdot J_{m+1}(k\rho \sin \vartheta_0) P_n^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.
 \end{aligned}$$

Die hier vorkommenden Integrale werden uns erst etwas später beschäftigen.

Die andern Integrale der Gl. (27) werden in ganz der gleichen Weise berechnet. Es zeigt sich in der Tat, daß, wie zu verlangen war, die Koeffizienten von $\frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr}$ und $\frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr}$ einander gleich sind. Für die gesuchte Größe $b_{n,m}$ finden wir folgendes Resultat:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} b_{n,m} = & (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} k^3 i^{n+m+5} \\ & - (n+m)(n-m+1) \sin(m-1) \varphi_1 \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\ & \quad \cdot J_{m-1}(k\rho \sin \vartheta_0) P_n^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ & + \sin(m+1) \varphi_1 \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\ & \quad \cdot J_{m+1}(k\rho \sin \vartheta_0) P_n^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \end{aligned} \right\}.$$

Bezeichnen wir die Koeffizienten der Reihenentwicklung, die die trigonometrischen. sin enthält, mit $\bar{b}_{n,m}$, so ergibt eine analoge Rechnung:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} \tilde{b}_{n,m} &= (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} k^3 i^{n+m+5} \\ &\cdot (n+m)n-m+1 \cos(m-1) \varphi_1 \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\ &\cdot J_{m-1}(k \varrho \sin \vartheta_0) P_n^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ &- \cos(m-1) \varphi_1 \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} \\ &\cdot J_{m+1}(k \varrho \sin \vartheta_0) P_n^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \end{aligned} \right\}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung der Koeffizienten der Reihenentwicklung für \mathfrak{E}_r über. Die gleichen Überlegungen wie vorher, verbunden mit der Integraldarstellung für \mathfrak{E}_r führt zu der folgenden Gleichung:

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{a_{n,m} \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2}}{\text{const}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^A \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 e^{ikr_1 \cos \gamma} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos \gamma} \right. \\ &\cdot \cos \gamma P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi d\Omega \Big) d\Omega_0 \\ &- \int_0^{2\pi} \int_0^A e^{ikr_1 \cos \gamma} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \cos \varphi e^{ikr \cos \gamma} \right. \\ &\cdot P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi d\Omega \Big) d\Omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Betrachten wir nun das erste Integral. Hier bemerken wir, daß

$$\cos \gamma e^{ikr \cos \gamma} = \frac{1}{i} \frac{\partial e^{ikr \cos \gamma}}{\partial (kr)}.$$

Wir setzen nun für $e^{ikr \cos \gamma}$ die Reihenentwicklung ein, und führen dann die Differentiation nach (kr) an der Reihe gliedweise aus. Wir beachten dazu die zweite Rekursionsformel für die ψ -Funktionen, die folgendermaßen lautet:

$$(34) \quad \frac{d}{dx} \frac{\psi_n(x)}{x} = \frac{1}{2n+1} \left(n \frac{\psi_{n-1}(x)}{x} - (n+1) \frac{\psi_{n+1}(x)}{x} \right).$$

So erhalten wir für das erste Integral:

$$\begin{aligned} &\frac{-4\pi i^{n+1}}{2n+1} \left(n \frac{\psi_{n-1}(kr)}{kr} - (n+1) \frac{\psi_{n+1}(kr)}{kr} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^A \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \\ &\cdot P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m \varphi_0 e^{ikr_1 \cos \gamma} d\Omega_0. \end{aligned}$$

Die weitere Reduktion bietet keine Schwierigkeiten, wenn wir die Gl. (30) benutzen. Wir schreiben gleich die Ergebnisse hin.

Es seien die $a_{n,m}$ und $\tilde{a}_{n,m}$ die Koeffizienten für die cos- bzw. sin-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 a_{n,m} = (ik)^3 \dot{q}^{n+m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} & \left\{ \begin{aligned} & n \cos(m+1) \varphi_1 \\ & \cdot \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} J_{m+1}(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ & \cdot P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ & + (n+1) \cos(m+1) \varphi_1 \\ & \cdot \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} J_{m+1}(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ & \cdot P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ & + (n+m-1)(n+m)(n+1) \cos(m-1) \varphi_1 \\ & \cdot \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} J_{m-1}(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ & \cdot P_{n-1}^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ & + n(n-m+1)(n-m+2) \cos(m-1) \varphi_1 \\ & \cdot \int_0^A e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0} J_{m-1}(k \varrho \sin \vartheta_0) \\ & \cdot P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Der gleiche Ausdruck gilt für die $\tilde{a}_{n,m}$, wenn man $\sin(m \pm 1) \varphi_1$ an Stelle der $\cos(m \pm 1) \varphi_1$ setzt.

§ 3. Die Reihen für die Potentiale und die elektromagnetischen Grenzbedingungen

Wir stellen die Berechnung der bestimmten Integrale, die in den Koeffizienten $\tilde{a}_{n,m}$, $a_{n,m}$, $\tilde{b}_{n,m}$, $b_{n,m}$ auftreten, zunächst zurück und zeigen, wie sich aus der Reihe für die \mathfrak{E}_r und \mathfrak{H}_r die Reihen für die beiden Potentiale unschwer berechnen lassen. Dazu beachten wir die Gl. (13). In diese setzen wir für \mathfrak{E}_r die Reihenentwicklung ein, die wir eben gefunden haben. Für $r \Pi^{(1)}$ setzen wir eine nach Kugelflächenfunktionen fortschreitende Reihe mit unbestimmten Koeffizienten in folgender Form an

$$(36) \quad \begin{cases} r \Pi_e^{(1)} = \frac{1}{k^2} \sum_n \sum_m \psi_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \\ \quad \cdot \{E_{n,m}^{(1)} \cos m\varphi + \bar{E}_{n,m}^{(1)} \sin m\varphi\}, \\ r \Pi_e^{(2)} = \frac{1}{k^2} \sum_n \sum_m \psi_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \\ \quad \cdot \{E_{n,m}^{(2)} \cos m\varphi + \bar{E}_{n,m}^{(2)} \sin m\varphi\}. \end{cases}$$

Wenn wir dann die Koeffizienten gleicher Kugelflächenfunktionen gleichsetzen, gelangen wir zur Differentialgleichung:

$$(37) \quad \left\{ \frac{a_{n,m}}{\tilde{a}_{n,m}} \right\} \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} = \left\{ \frac{E_{n,m}^{(1)}}{\bar{E}_{n,m}^{(1)}} \right\} \left(-\frac{\partial^2 \psi_n(kr)}{\partial (kr)^2} + \psi_n(kr) \right).$$

Jetzt beachte man die Differentialgleichung der ψ -Funktionen [Gl. (14a)]. Aus ihr ergibt sich sofort die gesuchte Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$(38) \quad \left\{ \frac{E_{n,m}^{(1)}}{\bar{E}_{n,m}^{(1)}} \right\} = \left\{ \frac{a_{n,m}}{\tilde{a}_{n,m}} \right\} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Wir haben jetzt gezeigt, wie bei Vorgabe eines elektromagnetischen Zustandes die Potentiale $\Pi_e^{(1)}$ und $\Pi_e^{(2)}$ zu berechnen sind. Durch die Anwesenheit einer beugenden Kugel im Felde wird bewirkt, daß das Feld in zweifacher Weise abgeändert wird. Erstens bewirkt die Veränderung der Dielektrizitätskonstanten und das Auftreten einer Leitfähigkeit eine Abänderung der Differentialgleichung (12) für die Potentiale $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ insofern, als die Konstante k von den Materialkonstanten des Mediums abhängt und im Innern des beugenden Körpers einen anderen Wert hat. Die Konstante k berechnet sich aus der Leitfähigkeit und der Dielektrizität in folgender Weise:

$$k_i^2 = -\frac{i\omega_i}{c} \frac{\sigma_i + i\varepsilon_i\omega_i}{c},$$

der Index i an den Materialgrößen deutet auf das Innere der Kugel hin. Wir haben daher für die Potentiale, die das Feld im Innern beschreiben, folgende Ansätze zu machen:

$$(39) \quad \begin{cases} r \Pi_i^{(1)} = \frac{1}{k_i^2} \sum_n \sum_m \psi_n(k_i r) P_n^m(\cos \vartheta) \\ \quad \cdot \{I_{n,m}^{(1)} \cos m\varphi + \bar{I}_{n,m}^{(1)} \sin m\varphi\}, \\ r \Pi_i^{(2)} = \dots \end{cases}$$

Zweitens: Die Beugungswelle im Außenraum tritt zu der ursprünglich allein herrschenden einfallenden Welle hinzu. Sie ist durch ihr Verhalten in großer Entfernung vom beugenden Teilchen gekennzeichnet. Sie muß für große r in eine divergente Kugelwelle übergehen, deren Amplitude eine Funktion der Richtungswinkel ϑ, φ allein ist. Wir müssen, wie wir bereits bemerkt haben, die Ψ -Funktionen einführen, deren Verhalten im Unendlichen allein die Erfüllung der gestellten Bedingung gewährleistet. Für die Beugungswelle haben wir daher den Ansatz:

$$(40) \quad \begin{cases} r \Pi_b^{(1)} = \frac{1}{k_a^2} \sum_n \sum_m \Psi_n(k_a r) P_n^m(\cos \vartheta) \\ \quad \cdot \{B_{n,m}^{(1)} \cos m \varphi + \tilde{B}_{n,m}^{(1)} \sin m \varphi\} \\ r \Pi_b^{(2)} = \dots \end{cases}$$

Beugungswelle und das Potential für das Innere sind Reihen mit zunächst unbestimmten Koeffizienten. Ihre Bestimmung gelingt unter Benutzung der elektromagnetischen Grenzbedingungen, die die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} verlangen. Die Bedingung, die sich zunächst für \mathcal{E} und \mathcal{H} ausspricht, ergibt mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen gewisse Stetigkeitsforderungen für die Potentiale Π . Zur Abkürzung führen wir ein

$$\tau^2 = \frac{\varepsilon \omega - i \sigma}{c},$$

eine Größe, die durch die Indizes i bzw. a noch auf Innen- oder Außenraum hinweist. Es ist dann offenbar:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{k_a}{\tau_a} = \frac{k_i}{\tau_i}; \quad \frac{i \varepsilon_a \omega_a + \sigma_a}{c} = i k_a \tau_a; \quad \frac{i \varepsilon_i \omega_i + \sigma_i}{c} = i k_i \tau_i.$$

Dann schreiben sich die Grenzbedingungen:

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} [r (\Pi_e^{(1)} + \Pi_b^{(1)})]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_i^{(1)})_{r=a}, \\ k_a \tau_a [r (\Pi_e^{(1)} + \Pi_b^{(1)})]_{r=a} = k_i \tau_i [r \Pi_i^{(1)}]_{r=a}, \\ \frac{\partial}{\partial r} [r (\Pi_e^{(2)} + \Pi_b^{(2)})]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_i^{(2)})_{r=a}, \\ \frac{k_a}{\tau_a} [r (\Pi_e^{(2)} + \Pi_b^{(2)})]_{r=a} = \frac{k_i}{\tau_i} [r \Pi_i^{(2)}]_{r=a}. \end{cases}$$

Setzen wir hier die Reihenentwicklungen für die Potentiale ein, so erhalten wir, wiederum nach Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Kugelflächenfunktionen, wenn wir unter ψ'_n bzw. Ψ'_n die Ableitungen der Funktionen nach ihrem Argument bezeichnen:

$$k_a \tau_a \left\{ \Psi_n(k_a a) B_{n,m}^{(1)} + \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \psi_n(k_a a) \right\} = k_i \tau_i I_{n,m}^{(1)} \psi_n(k_i a),$$

$$k_a \left\{ \Psi_n'(k_a a) B_{n,m}^{(1)} + \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \psi_n'(k_a a) \right\} = k_i I_{n,m}^{(1)} \psi_n'(k_i a)$$

a = Kugelradius.

Ganz analoge Gleichungen verknüpfen die sin-Koeffizienten, die durch \sim bezeichnet sind, wie auch die Koeffizienten mit dem Index $^{(2)}$.

Daraus folgt dann für die Koeffizienten des Potentials $\Pi^{(1)}$:

$$(42) \quad B_{n,m}^{(1)} = - \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \frac{\alpha \psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \beta \psi_n(\beta) \psi_n'(\alpha)}{\alpha \Psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \beta \Psi_n(\beta) \psi_n(\alpha)}.$$

Hier bedeuten $\alpha = k_a a$ und $\beta = k_i a$.

Entsprechendes gilt für die Koeffizienten mit \sim .

Für die Koeffizienten des zweiten Beugungspotentials sieht die Relation etwas anders aus. Man findet:

$$(43) \quad B_{n,m}^{(2)} = - \frac{b_{n,m}}{n(n+1)} \frac{\psi_n(\alpha) [\beta \psi_n(\beta)]' - \psi_n(\beta) [\alpha \psi_n(\alpha)]'}{\Psi_n(\alpha) [\beta \psi_n(\beta)]' - \psi_n(\beta) [\alpha \Psi_n(\alpha)]'}.$$

Es mag bemerkt werden, daß der unterschiedliche Aufbau der Koeffizienten $B_{n,m}^{(1)}$ und $B_{n,m}^{(2)}$ davon herrührt, daß bereits die vierte der Gl. (41) anders gebaut ist als die Gl. (41) III.

Die Gl. (42) und (43) unterscheiden sich von den seinerzeit von Mie aufgestellten Ausdrücken für ebene einfallende Wellen durch den Faktor $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, an dessen Stelle bei Mie $i^{n-1} (2n+1)$ tritt. Ein weiterer Unterschied zwischen Mie und dem hier durchgeführten liegt darin, daß bei Mie die Potentiale Π keine Doppelsummen sind, sondern die einfache Form haben:

$$r \Pi = \frac{1}{k^2} \sum_n \Psi_n(kr) B_n P_n^{-1}(\cos \vartheta) \cos \varphi.$$

Die n -te Partialschwingung $\Psi_n(kr)$ hat als Richtungsfunktion den Faktor $B_n P_n^{-1}(\cos \vartheta) \cos \varphi$, während bei uns an dessen Stelle der kompliziertere Faktor

$$(44) \quad \sum_{m=0}^n P_n = (\cos \vartheta) \{ B_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin m \varphi \}$$

tritt. Die beiden Koeffizienten $B_{n,m}$ und $\tilde{B}_{n,m}$ haben als gemeinsamen Faktor nach Gl. (42) die Größe

$$(45) \quad \frac{1}{n(n+1)} \frac{\alpha \psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \beta \psi_n(\beta) \psi_n'(\alpha)}{\alpha \Psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \beta \psi_n(\beta) \Psi_n'(\alpha)} = F_n$$

und dieser Ausdruck tritt auch in den Koeffizienten B_n der Mieschen Reihe auf. Mie konnte zeigen, daß für sehr kleine beugende Kugeln der Ausdruck (45) so klein wird, daß es hinreicht, allein das erste Glied des Potentials $\Pi^{(1)}$ zur Berechnung der Ausstrahlung heranzuziehen. Diesen Schluß können wir ohne weiteres übernehmen, wenn es uns gelingt nachzuweisen, daß der Ausdruck (44) für jedes n von der gleichen Größenordnung ist wie der entsprechende Ausdruck

$$-i^{(n-1)}(2n+1)F_n \cdot P_n^{-1}(\cos \vartheta) \cos \varphi$$

bei Mie. Nach (42) und (45) ist

$$B_{n,m}^{(1)} = -a_{n,m} \cdot F_n, \quad \tilde{B}_{n,m} = -\tilde{a}_{n,m} F_n.$$

Es muß also gezeigt werden, daß der unter Weglassung des Faktors F_n aus (44) entstehende Ausdruck

$$(46) \quad \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\}$$

größenordnungsmäßig mit dem Mieschen Ausdruck

$$(47) \quad (2n+1)P_n^{-1}(\cos \vartheta) \cos \varphi$$

übereinstimmt. Aus der Integraldarstellung¹⁾ der Kugelfunktionen liest man leicht die Abschätzung ab:

$$|P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi| \leq \frac{(n+m)!}{n!}.$$

Daraus folgt, daß der Miesche Ausdruck nie größer als $(2n+1)(n+1)$ ist, abgesehen natürlich von einem willkürlichen Intensitätsfaktor. Den Ausdruck (46) können wir leicht mit Hilfe der Integraldarstellung (33) für die $a_{n,m}$ und $\tilde{a}_{n,m}$ abschätzen. Bezeichnen wir die unter dem vierfachen Integral stehende Funktion, abgesehen von dem Faktor $P_n^m(\cos \vartheta_2) \frac{\cos m \varphi_2}{\sin m \varphi_2}$ mit $\Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \vartheta_2, \varphi_2)$, so ist sicher

$$(48) \quad \begin{cases} a_{n,m} \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} = \frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \vartheta_2, \varphi_2) \\ \quad \cdot P_n^m(\cos \vartheta_2) \cos m \varphi_2 d\Omega_2 d\Omega_0, \\ \tilde{a}_{n,m} \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} = \frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \vartheta_2, \varphi_2) \\ \quad \cdot P_n^m(\cos \vartheta_2) \sin m \varphi_2 d\Omega_2 d\Omega_0. \end{cases}$$

1) Z. B. E. T. Whittaker, G. N. Watson, a. a. O.

Wir bilden jetzt:

$$\frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\},$$

indem wir an Stelle von $\left\{ \begin{matrix} a_{n,m} \\ \tilde{a}_{n,m} \end{matrix} \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} \right\}$ die Größe (48) einsetzen. Schreiben wir dann noch die Faktoren $P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}$ mit unter das Integral, was gestattet ist, da wir nicht über ϑ, φ zu integrieren haben, so ergibt sich:

$$(49) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} \cdot \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\} \\ &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\vartheta_0 \varphi_0 \vartheta_2 \varphi_2) \left\{ P_n(\cos \vartheta_2) P_n(\cos \vartheta) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_2) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m(\varphi - \varphi_2) \right\} d\Omega_2 d\Omega_0, \end{aligned} \right.$$

so können wir die rechte Seite auch schreiben:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi \cdot P_n(\cos \tilde{\gamma}) d\Omega_2 d\Omega_0;$$

$$\cos \tilde{\gamma} = \cos \vartheta \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta \sin \vartheta_2 (\cos \varphi - \varphi_2).$$

Man sieht leicht aus Gl. (33), daß das Maximum des absoluten Betrages von Φ kleiner als 2 ist, $P_n(\cos \tilde{\gamma})$ ist immer kleiner als 1, so daß man unter Berücksichtigung der Integrationsintervalle für die linke Seite von (49) die Abschätzung

$$(50) \left\{ \left| \frac{\psi_n(kr)}{(kr)^2} \cdot \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\} \right| \right\} \leq (2n+1) \cdot 4\pi A$$

erhält. Diese Abschätzung gilt, wie man leicht sehen kann, für beliebige Werte des Radiusvektors r , also z. B. auch für sehr große. Für solche Werte von r gehen aber die Funktionen $\psi_n(kr)$ in $\sin kr$ oder $\cos(kr)$ über, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Daher gilt sicher auch die Ungleichung:

$$\frac{1}{(kr)^2} \left| \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\} \right| \leq (2n+1) \cdot 4\pi A.$$

Daraus folgt dann aber, daß sich zwei solche Summen mit $n = n_1$ und $n = n_2$ verhalten wie $\frac{2n_1 + 1}{2n_2 + 1}$, während die Mieschen Ausdrücke sich verhalten wie $\frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)}$. Damit ergibt sich, daß, abgesehen von einem Intensitätsfaktor, der natürlich beliebig wählbar ist, die Summe

$$\left| \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \vartheta) \{a_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{a}_{n,m} \sin m \varphi\} \right|$$

immer kleiner ist als der entsprechende Ausdruck bei Mie.

Durch eine entsprechende Überlegung findet man, daß dieselbe Abschätzung für das Potential Π^2 durchgeführt werden kann, daß also auch

$$\left| \sum P_n^m(\cos \vartheta) \{b_{n,m} \cos m \varphi + \tilde{b}_{n,m} \sin m \varphi\} \right|$$

nie größer werden als die entsprechenden Koeffizienten $i^{n-1}(2n+1)P_n^1(\cos \vartheta) \sin \varphi$ bei Mie.

Damit gelten also die Mieschen Abschätzungen auch hier. Aus ihnen folgt, daß bei kleinen Kugeln das elektromagnetische Feld hinreichend durch die Glieder für $n=1$ des Potentials $\Pi^{(1)}$ beschrieben werden kann. Denn unter Benutzung der Reihen für $\psi_n(kr)$ und $\Psi_n(kr)$ findet man für kleine Teile aus den Gl. (42) und (43)

$$(51) \quad \begin{cases} B_{n,m}^{(1)} = -a_{n,m} \cdot i \frac{e^{i\alpha}}{n} \frac{(2n+1)\alpha^{2n+1} \left(\frac{k_a^2}{k_i^2} - 1 \right)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)]^2 \left[(n+1) \frac{k_a^2}{k_i^2} + n \right]}, \\ B_{n,m}^{(2)} = -b_{n,m} \cdot i \frac{e^{i\alpha}}{n} \frac{\alpha^{2n+3} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_a^2} \right)}{(n+1)(2n+3)[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2}, \end{cases}$$

woraus sich ergibt, daß wirklich die erste „Partialschwingung“ von $\Pi^{(2)}$ der zweiten von $\Pi^{(1)}$ größenordnungsmäßig gleich und im Falle kleiner Teile sicher zu vernachlässigen ist.

Die Größen $B_{n,m}^{(1)}$ die zu der ersten Partialschwingung beitragen, lauten in der benutzten Näherung:

$$(52) \quad B_{1,m}^{(1)} = i a_{1,m} \frac{1}{3} \alpha^3 \frac{(m'^2 - 1)}{(2m'^2 - 1)} \quad m' = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Bei Mie steht an dessen Stelle:

$$B_1^{(1)} = \alpha^3 \frac{(m'^2 - 1)}{(2m'^2 + 1)}.$$

Dabei haben in beiden Fällen α und β dieselbe Bedeutung wie in Gl. (42) und (43).

$$\alpha = k_a \cdot a. \quad \beta = k_i a. \quad a = \text{Kugelradius.}$$

Offenbar ist also der Quotient $\frac{\alpha}{\beta} = m'$ der (komplexe) Brechungs-exponent des Kugelmateriale gegen das umgebende Medium.

§ 4. Die Berechnung der Streuintensitäten

Wir wollen in derselben Weise wie Mie die Strahlung der ersten Partialschwingung des Potentials $\Pi^{(1)}$ mit „Rayleigh-scher Strahlung“ bezeichnen. Mit dieser haben wir es ausschließ-lich zu tun, wenn wir uns auf kleine Kugeln beschränken. Wir messen die Intensität der Strahlung in sehr großer Entfernung vom beugenden Teilchen. Dies ist in Wahrheit gar keine Be-schränkung, da sich „groß“ auf Wellenlängen bezieht, so daß jede im experimentellen Sinne endliche Entfernung als groß gegen die Wellenlänge des Lichtes angesehen werden kann. Die radialen Feldstärken verschwinden stärker als die tangen-tialen Schwingungen im Unendlichen, wie man aus den Gl. (13) ersieht, so daß allein die transversalen Schwingungen übrig-bleiben.

Aus der Gl. (40) folgt dann für die Rayleighsche Strah-lung ($n = 1$) und unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens der Ψ -Funktionen ($\Psi \sim e^{-ikr}$)

$$(53) \quad \begin{cases} r \Pi^{(1)} = \frac{e^{-ikr}}{k^2} \{ B_{10}^{(1)} \cos \vartheta + B_{11}^{(1)} \sin \vartheta \cos \varphi \\ + \tilde{B}_{11}^{(1)} \sin \vartheta \sin \varphi \}. \end{cases}$$

Beachten wir dann die Gl. (13), mit deren Hilfe wir von den Potentialen zu den Feldstärken übergehen können, so erhalten wir:

$$(54) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_\theta = -\frac{e^{-ikr}}{kr} \left\{ -B_{10}^{(1)} \sin \vartheta + B_{11}^{(1)} \cos \vartheta \cos \varphi \right. \\ \quad \left. + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \vartheta \sin \varphi \right\} \\ \mathcal{H}_\varphi = -\frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{e^{-ikr}}{k^2 r} \left\{ -B_{10}^{(1)} \sin \vartheta + B_{11}^{(1)} \cos \vartheta \cos \varphi \right. \\ \quad \left. + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \vartheta \sin \varphi \right\} \\ \mathcal{E}_\varphi = -i \frac{e^{-ikr}}{kr} \left\{ -B_{11}^{(1)} \sin \varphi + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \varphi \right\} \\ \mathcal{H}_\theta = +\frac{\sigma + i s \omega}{c} \frac{e^{-ikr}}{k^2 r} \left\{ -B_{11}^{(1)} \sin \varphi + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \varphi \right\}. \end{cases}$$

Daraus folgt dann die Intensität als absoluter Betrag des Poyntingschen Stromvektors:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{\vartheta} &= \mathfrak{E}_{\vartheta} \cdot \mathfrak{H}_{\vartheta}^* = \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2} \left| -B_{10}^{(1)} \sin \vartheta + B_{11}^{(1)} \cos \vartheta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \vartheta \sin \varphi \right|^2 \\ I_{\varphi} &= \mathfrak{E}_{\varphi} \cdot \mathfrak{H}_{\varphi}^* = \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2} \left| -B_{11}^{(1)} \sin \varphi + \tilde{B}_{11}^{(1)} \cos \varphi \right|. \end{aligned} \right.$$

Als Summe von beiden folgt daraus unter Beachtung von Gl. (52):

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{\lambda^2 a^6}{36 \pi^2 r^2} \left| \frac{m'^2 - 1}{2 m'^2 + 1} \right|^2 \left\{ |a_{10}|^2 \sin^2 \vartheta - |a_{11}|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + |\tilde{a}_{11}|^2 - |\tilde{a}_{11}|^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + |\tilde{a}_{11}|^2 \right. \\ &\quad \cdot \Re \left(-2 |a_{10} \tilde{a}_{11}^*| \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - 2 |a_{11} \tilde{a}_{11}^*| \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 |a_{10} \tilde{a}_{11}^*| \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

\Re bedeutet Realteil.

Wie man sieht, ist die Richtungsabhängigkeit der Rayleighschen Strahlung im Gegensatz zu den einfachen Ergebnissen von Mie äußerst kompliziert.¹⁾

Aber auch aus anderen Gründen ist die Formel so, wie sie hier vorliegt, noch gar nicht zu gebrauchen. Aus ihr würde man Ergebnisse ableiten, die man in Wahrheit niemals beobachten würde. Man sieht dies sehr leicht ein, wenn man überlegt, daß die Koeffizienten a_{10} , a_{11} , \tilde{a}_{11} , aus denen sich der Intensitätsausdruck zusammensetzt, noch Funktionen des Richtungswinkels φ_1 sind. Beachten wir die geometrische Bedeutung dieser Größe, so sieht man leicht, daß eine Abhängigkeit von φ_1 nicht vorhanden sein dürfte. Denn φ_1 ist das Azimut des Kugelmittelpunkts, bezogen auf den Brennpunkt. Es ist klar, daß bei den realisierbaren Lichtkegeln mit Notwendigkeit eine Symmetrie zur Kegelachse herrscht. Diese aber ist nicht vorhanden, wie das Auftreten des Winkels φ_1 in der Formel beweist. (Daß diese Größe wirklich in den a_{10} , a_{11} , \tilde{a}_{11} auftritt, werden wir erst etwas später zeigen, Gl. (59).

1) Vgl. Handb. d. phys. Optik, I. S. 656. Der dort angegebene Ausdruck läßt sich am besten mit dem hier gefundenen vergleichen, weil dort, im Gegensatz zu Mies Arbeit, die gleiche Methode benutzt wurde wie hier.

Es ist ja auch unschwer einzusehen, daß diese Asymmetrie in unseren Formeln vorhanden sein muß; sie liegt am Ansatz (1) für den Hertzschen Vektor, wo wir in ganz willkürlicher Weise die x -Komponente des Hertzschen Vektors benutzten. Man sollte nun glauben, daß diese Asymmetrie sich durch Hinzufügung der y -Komponente des Hertzschen Vektors beseitigen ließe, doch kann man auch auf diese Weise die Symmetrie des Systems nicht erreichen.¹⁾ Man könnte zwar Ansätze für den Hertzschen Vektor angeben, bei deren Benutzung die Feldstärken Achsensymmetrie aufweisen würden, doch wird man dadurch zu einem komplizierteren Ansatz geführt, der noch schwerer zu diskutieren ist, als der von uns benutzte. Vor allem glauben wir aber, daß die Symmetrie bei den realisierbaren Bündeln einen ganz anderen Grund hat. Nach unserer Auffassung hat man hierfür die Inkohärenz der Strahlung in Rechnung zu ziehen. Diese würde sich darin äußern, daß z. B. der Ansatz (1) nur sehr kurze Zeit gilt; kurze Zeit heißt hier eine Zeitspanne, die nach Bruchteilen einer Sekunde mißt, die aber doch in sich das Vielfache der Dauer einer Lichtfrequenz enthält. Nach Ablauf dieser Zeit wird ein anderer Ansatz gelten, bei dem der Vektor \mathfrak{P} nicht mehr in der x -Achse schwingt, sondern in einer anderen, wieder zur Achse des Bündels senkrechten Richtung. Der Vektor \mathfrak{P} wird also unregelmäßige und unkontrollierbare Schwingungen um die Lichtachse ausführen, wobei alle zur Lichtachse senkrechten Richtungen als gleich wahrscheinlich anzusehen sind. Über alle diese Richtungen ist also an den Feldstärken zu mitteln.

Aus (54) folgt unter Benutzung von Gl. (52):

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_\vartheta &= \frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{\alpha^3}{3} \frac{(m'^2 - 1)}{(2m'^2 + 1)} \{ -a_{10} \sin \vartheta + a_{11} \cos \vartheta \cos \varphi \\ &\quad + \tilde{a}_{11} \cos \vartheta \sin \varphi \} \\ \mathfrak{E}_\varphi &= \frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{\alpha^3}{3} \frac{(m'^2 - 1)}{(2m'^2 + 1)} \{ -a_{11} \sin \varphi + \tilde{a}_{11} \cos \varphi \}. \end{aligned} \right.$$

Die Größen $a_{1,m}$ sind uns durch das Integral (35) gegeben. Wir schreiben diese Darstellung unter Vernachlässigung des Faktors $(ik)^3$, indem wir folgende Abkürzungen gebrauchen:

1) Aber auch die Benutzung der Komponente \mathfrak{P} , liefert keine achsensymmetrische Intensität, wie man leicht sieht, wenn man zu den Feldstärken übergeht. Auch in diesem Falle muß gemittelt werden, um symmetrische Verhältnisse zu erhalten. Da die so ermittelten Resultate nur unwesentlich von dem hier ausführlich durchgeführten Fall abwichen, haben wir auf eine Wiedergabe verzichtet.

$$(58) \quad G_{n,m} = \int_0^A e^{-1 \pm k z_1 \cos \vartheta_0} J_m(k \varrho \sin \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Dann ergibt sich:

$$(59) \quad \begin{cases} a_{10} = i \cos \varphi_1 G_{2,1}, & a_{11} = - \left\{ \frac{\cos^2 \varphi_1}{2} G_{2,2} + 2 G_{0,0} + G_{2,0} \right\}, \\ \bar{a}_{11} = - \frac{\sin^2 \varphi_1}{2} G_{2,2}. \end{cases}$$

Nunmehr ist die Mittelung an den Feldstärken Gl. (54) durchzuführen. Wir denken uns zu diesem Zweck ein zweites Feld das durch einen Ansatz analog der Gl. (1) dargestellt ist. Der Unterschied soll der sein, daß der Vektor \mathfrak{P} eine andere Richtung hat. Wir können den Ansatz (1) auch für dieses Feld benutzen, wenn wir nur annehmen, daß das mit dem Brennpunkt festverbundene kartesische Koordinatensystem gegen das ursprünglich benutzte eine Drehung um die z -Achse aufweist. Dadurch wird in allen unseren Formeln nur bewirkt, daß das Azimut φ_1 (das Azimut des Kugelmittelpunktes bezogen auf den Brennpunkt) einen anderen Wert, sagen wir $\varphi_1 - \bar{\varphi}$ annimmt, wo $\bar{\varphi}$ der Betrag ist, um den das neue Koordinatensystem gegen das im Ansatz (1) benutzte gedreht ist. Alle verschiedenen zum Bündel beitragenden Impulse werden sich dann nur durch den Wert des Winkels $\bar{\varphi}$ voneinander unterscheiden, der ganz beliebig zwischen Null und 2π variieren kann. Über diesen Winkel ist also zu mitteln. Rechnerisch erhält man natürlich das gleiche wenn man direkt über den Winkel φ_1 mittelt. Tun wir dies und beachten die Gl. (59), so erhalten wir an Stelle von (54) folgende Gleichung:

$$(60) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\vartheta = - \frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{\alpha^3}{3} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right| \{2G_{00} + G_{20}\} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \mathfrak{E}_\varphi = - \frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{\alpha^3}{3} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right| \{2G_{00} + G_{20}\} \sin \varphi. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich dann die Intensität der beiden zueinander senkrecht polarisierten Strahlen:

$$(61) \quad \begin{cases} I_\vartheta = \frac{\lambda^3}{4\pi^2 r^3} \frac{\alpha^6}{9} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right|^2 \{2G_{00} + G_{20}\}^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \\ I_\varphi = \frac{\lambda^3}{4\pi^2 r^3} \frac{\alpha^6}{9} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right|^2 \{2G_{00} + G_{20}\}^2 \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem von Mie für ebene Wellen gefundenen Ausdruck¹⁾ zeigt vollkommene Überein-

1) Vgl. Handb. d. phys. Optik, I. S. 856.

stimmung der beiden Formeln, soweit man das überhaupt verlangen kann. Neben dem von Mie erhaltenen Faktor, der die Materialeigenschaften bei der Strahlung zum Ausdruck bringt und der in genau der gleichen Form bei uns sich findet, gibt es bei uns noch einen zweiten Faktor: $|2G_{00} + G_{20}|^2$, der nun dem speziellen Lichtzustand Rechnung trägt. Auf die Diskussion dieses Faktors wird es uns allein ankommen.

Wir addieren die beiden in (60) enthaltenen Intensitäten und integrieren über die Oberfläche einer sehr großen Kugel. Wir erhalten so die im Mittel pro Flächeneinheit von der beugenden Kugel ausgestrahlte Intensität:

$$(62) \quad \bar{I} = \frac{2\lambda^3 \alpha^6}{27\pi} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right|^2 |2G_{00} + G_{20}|^2.$$

Dieser Ausdruck wird uns im folgenden beschäftigen; kennen wir ihn, so läßt sich aus ihm mit Hilfe des Richtungsfaktors $(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi)$ die in beliebiger Richtung ausgestrahlte Intensität berechnen.

Aus rechnerischen und zeichnerischen Gründen erscheint es indessen zweckmäßig, an Stelle von \bar{I} den Ausdruck \bar{I}/v^2 zu gebrauchen, wo v das Volumen des beugenden Teilchens bedeutet:

$$v = \frac{\alpha^3 \lambda^3}{6\pi^2}.$$

So erhalten wir dann diejenige Größe, die im folgenden berechnet werden soll:

$$(63) \quad \frac{\bar{I}}{v^2} = \frac{24\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{9} \left| \frac{m'^2 - 1}{2m'^2 + 1} \right|^2 |2G_{00} + G_{20}|^2.$$

§ 5. Der Ansatz zur numerischen Auswertung

Die Berechnung der $G_{n,m}$ läßt sich durch Rekursionen auf die Berechnung der $G_{n,n}$ zurückführen. Man integriere die Integrale (58) partiell, indem man vorher $\cos \vartheta_0 = u$ und $\cos A = a$ setzt; dann erhält man:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_a^A e^{-ikz_1 u} J_m(k\rho\sqrt{1-u^2}) \varrho_n^m(u) du \\ &= \frac{1}{-ikz_1} \left[e^{-ikz_1 u} J_m(k\rho\sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right]_a^1 \\ & \quad \cdot \frac{-1}{-ikz_1} \int_a^1 e^{-ikz_1 u} \left(J_m(k\rho\sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right)' du. \end{aligned} \right.$$

Jetzt beachte man, daß folgende Beziehung gilt:

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(J_m(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right)' &= \frac{k \varrho}{2m} \left(J_{m+1}(k \varrho \sqrt{1+u^2}) P_n^{m+1}(u) \right. \\ &\quad \left. - (n-m+1)(n+m) J_{m-1}(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^{m-1}(u) \right), \end{aligned} \right.$$

wie man unter Benutzung der Rekursionsformeln für die Kugel- und Zylinderfunktionen nachrechnet. Wir geben die benutzten Formeln an, weil nicht alle in der Literatur explizit zu finden sind:

1. $P_n^m(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2mx} ((n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(x) + P_n^{(m+1)}(x)),$
2. $\frac{d P_n^m(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (P_n^{m+1}(x) - (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(x)),$
3. $\frac{2m}{z} J_m(z) = J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z),$
4. $J_m(z) = \frac{1}{2} (J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)).$

Setzen wir die Formel (65) in das Integral ein, so erhalten wir folgende Rekursionsformel für unsere Integrale, wenn der obere Index m kleiner als $n-1$ ist:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^1 e^{-ikz_1 u} J_m(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) du \\ &= \frac{1}{-ikz_1} \left[e^{-ikz_1 u} J_m(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right]_a^1 \\ &- \frac{\alpha}{-ikz_1} \int_a^1 e^{-ikz_1 u} J_{m+1}(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^{m+1}(u) du \\ &\quad + \frac{\beta}{-ikz_1} \int_a^1 e^{-ikz_1 u} J_{m-1}(k \varrho \sqrt{1+u^2}) P_n^{m-1}(u) du, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\alpha = \frac{k \varrho}{2m}, \quad \beta = \frac{k \varrho}{2m} (n-m+1)(n+m).$$

Ist aber $m = n-1$, dann erhalten wir die einfachere Form:

$$\begin{aligned} &\int_a^1 e^{-ikz_1 u} J_n(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^n(u) du \\ &= \frac{1}{-ikz_1} \left[e^{-ikz_1 u} J_n(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^n(u) \right]_a^1 \\ &+ \frac{k \varrho}{-ikz_1} \int_a^1 e^{-ikz_1 u} J_{n-1}(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^{n-1}(u) du, \end{aligned}$$

d. h. unter Beachtung der Gl. (64):

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{n,m} &= -\frac{1}{i k z_1} \left\{ \left[e^{-i k z_1 u} J_m(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right]_a^1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{k \varrho}{2m} G_{n,m+1} + \frac{k \varrho}{2m} (n-m+1)(n+m) G_{n,m-1} \right\} \\ G_{n,n} &= -\frac{1}{i k z_1} \left\{ \left[e^{-i k z_1 u} J_n(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^n(u) \right]_a^1 \right. \\ &\quad \left. + k \varrho G_{n,n-1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen gelingt es in der Tat, wenn allein $G_{n,n}$ bekannt ist, alle Integrale $G_{n,m}$ mit dem gleichen ersten Index zu finden. Denn mit Hilfe der zweiten Gl. (67) berechnet man aus $G_{n,n}$ das Integral $G_{n,n-1}$. Kennt man aber diese beiden, so liefert die erste Gl. (67) sofort das Integral $G_{n,n-2}$ usw.

Wir geben neben den Formeln (67) noch speziellere an für den Fall, daß der Brennpunkt des Bündels sich in der x - y -Ebene unseres Koordinatensystems befindet (d. h. der Mittelpunkt der beugenden Kugel befindet sich in der zur Achse des Bündels senkrechten Ebene, die durch den Brennpunkt des Bündels geht). Für diesen Fall erhalten wir:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[J_m(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^m(u) \right]_a^1 &= \frac{k \varrho}{2m} G_{n,m+1} \\ &\quad - \frac{k \varrho (n-m+1)(n+m)}{2m} G_{n,m-1} \quad m \leq n-1, \\ \left[J_n(k \varrho \sqrt{1-u^2}) P_n^n(u) \right]_a^1 &= -k \varrho G_{n,n-1}. \end{aligned} \right.$$

Wir können nach dem eben Abgeleiteten alle Integrale G berechnen, wenn es uns gelingt, die Integrale $G_{n,n}$ auszuwerten. Um dies durchzuführen, geben wir eine Reihenentwicklung für diese Integrale an. Zunächst erhalten wir für die Funktion $e^{i k r \cos \gamma}$ zwei Reihenentwicklungen; die eine schreitet nach den gewöhnlichen Zylinderfunktionen fort, die andere nach den Kugelflächenfunktionen:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i k r \cos \gamma} &= e^{i k r \cos \vartheta \cos \vartheta_0} \left\{ J_0(k r \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^{\infty} i^p J_p(k r \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \cos p(\varphi - \varphi_0) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i k r \cos \vartheta} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \frac{\psi_n(kr)}{(kr)} \left\{ P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Auf beiden Seiten der beiden Gleichungen multiplizieren wir mit $\cos m \varphi_0$ und integrieren über φ_0 von 0 bis 2π . Setzen wir dann die beiden Seiten von (69) einander gleich, so ergibt sich:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} i^m e^{i k r \cos \vartheta \cos \vartheta_0} J_m(kr \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \frac{\psi_n(kr)}{kr} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0). \end{aligned} \right.$$

Wenn wir noch mit $P_n^n(x) = \text{const} \cdot \sqrt{1-x^2}^n$ multiplizieren und dann über x von u bis 1 integrieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\int_u^1 e^{i k r x \cos \vartheta_0} J_n(kr \sqrt{1-x^2} \sin \vartheta) \sqrt{1-x^2}^n dx \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} (2\sigma+1) i^{\sigma-n} \frac{\varphi_{\sigma}(kr)}{kr} \frac{(\sigma-n)!}{(\sigma+n)!} P_{\sigma}^n(\cos \vartheta) \int_u^1 P_{\sigma}^n(x) \sqrt{1-x^2}^n dx. \end{aligned}$$

Für die Durchführung der Integration auf der rechten Seite entnehmen wir der Literatur die Formel:

$$\int_u^1 P_n^{\nu}(x) \sqrt{1-x^2}^{\nu} dx = - \frac{\sqrt{1-u^2}^{\nu+1} P_n^{\nu+1}(u)}{(n+\nu+1)(n-\nu)},$$

während wir für $n = \nu$ die Rekursion

$$(2\nu+1) \int_u^1 (1-x^2)^{\nu} dx - 2\nu \int_u^1 (1-x^2)^{\nu-1} dx = \left[x(1-x^2)^{\nu} \right]_u^1,$$

zu beachten haben. Daraus ergibt sich dann:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_u^1 e^{i k r \cos \vartheta \cdot x} J_m(k r \sin \vartheta \sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^{2m}} dx \\ &= (2m+1) \frac{\psi_m(kr)}{kr} \frac{(2m)!}{[2^m(m)!]^2} \sin^m \vartheta \int_u^1 (1-x^2)^m dx \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} (2n+1) i^{n-m} \frac{\psi_n(kr)}{kr} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ &\cdot P_n^m(\cos \vartheta) \frac{1}{(n+m+1)(n-m)} P_n^{m+1}(u) \sqrt{1-u^{2m+1}}. \end{aligned} \right.$$

Zur Berechnung der Rayleighschen Gesamtstrahlung (Gl. 63) brauchen wir die beiden Integrale $G_{0,0}$ und $G_{2,0}$; $G_{2,0}$ aber berechnet sich durch Rekursion [Gl. (67)] aus $G_{2,2}$. Wir geben daher die speziellen Reihen für $G_{0,0}$ und $G_{2,2}$ hier an:

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{0,0} &= \frac{\psi_0(kr)}{kr} (1-u) - \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \sqrt{1-u^2} \\ &\quad \cdot P_n^1(u) \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n(\cos \vartheta), \\ G_{2,2} &= \frac{5 \cdot 3^2}{2 \cdot 4} \frac{\psi_2(kr)}{(kr)} \sin^2 \vartheta \left[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_u^1 \\ &\quad - \sum_{n=3}^{\infty} (2n+1) i^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n+2)!} \frac{1}{(n+3)(n-2)} \\ &\quad \cdot \frac{\psi_n(kr)}{(kr)} P_n^2(\cos \vartheta) P_n^2(u) \sqrt{1-u^2}. \end{aligned} \right.$$

§ 6. Ergebnisse der Rechnung

Zuerst betrachten wir den Fall, daß die beugende Kugel auf der Achse des Bündels liegt; d. h. es ist $\vartheta = 0$. Das bedeutet, daß in den Integralen $G_{n,0}$ die Zylinderfunktion $J_0(kr_1 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_0)$ gleich 1 wird. Der uns allein interessierende Faktor in (48) nimmt dann die folgende Form an:

$$(73) \quad \left| 2G_{00} + G_{20} \right|^2 = \frac{9}{4} \left| \int_u^1 e^{i k r_1 x} (1+x^2) dx \right|^2.$$

Um die Abhängigkeit vom Öffnungswinkel, d. h. von der unteren Grenze u des Integrales und von der Entfernung r_1 der Kugel

vom Brennpunkt diskutieren zu können, integrieren wir (73) aus und finden:

$$(74) \left\{ \begin{aligned} & \left| 2G_{00} + G_{20} \right|^2 \cdot \frac{a^3}{9} = -2 \left[(a^2 - 1) \left(\frac{u^2 + 1}{2} a^2 - 1 \right) + a^2 u \right] \\ & \cdot \cos a(1 - u) + 2 \left[\left(\frac{u^2 + 1}{2} a^2 - 1 \right) - u(a^2 - 1) \right] \\ & \cdot \sin a(1 - u) + a^3(1 + u^2) + (a^2 - 1)^2 + \left(\frac{u^2 + 1}{2} a^2 - 1 \right)^2. \end{aligned} \right.$$

wobei

$$a = \frac{2\pi}{\lambda} r.$$

Wir berechneten Kurven für die Öffnungswinkel $u = \cos 45^\circ$, $u = \cos 30^\circ$, $u = \cos 15^\circ$. Um aber diese Kurven besser mit den Ergebnissen Mies vergleichen zu können, mußten wir noch eine Intensitätsreduktion vornehmen. Denn es ist nicht ohne weiteres sicher, daß man einen durch Gl. (1) gegebenen Lichtzustand mit dem entsprechenden einer ebenen Welle, der durch

$$\mathfrak{P} = i k e^{i k r \cos \vartheta}$$

gegeben ist, vergleichen kann, schon deshalb nicht, weil der Ausdruck¹⁾ mit verschwindender oberer Grenze nicht gegen den einer ebenen Welle konvergiert, sondern gegen Null geht. Man sieht aber leicht an dem für sehr kleine Öffnungswinkel gültigen Ausdruck des Hertzschen Vektors einer Kugelwelle:

$$\mathfrak{P}_x = i k e^{i k r \cos \vartheta} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{J_1(k r \sin \vartheta \alpha)}{k r \sin \vartheta \alpha},$$

daß dieser Ausdruck gegen den üblichen einer ebenen Welle konvergiert, wenn wir diesen mit $2/\alpha^2$ multiplizieren. Dies bedeutet dann für die Intensität eine Multiplikation mit

$$\frac{1}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}},$$

und dieser Faktor ist in unseren Kurven mit berücksich-

sichtigt, wobei α natürlich im Winkelmaß gemessen ist. In unseren Kurven ist als Ordinate in geeignetem Maß die Intensität, als Abszisse die Größe r_1/λ aufgetragen, weil in unseren

1) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ist, abgesehen vom Faktor 2π , die Größe des räumlichen Winkels des Kegels. Für kleine α geht dies gerade in $\alpha^2/2$ über. Wir sorgen also dafür, daß die Intensität pro Raumwinkel konstant bleibt, d. h. daß die Intensität pro Raumwinkeleinheit größer wird, wenn wir den Raumwinkel verkleinern.

Intensitätsausdrücken die Größen r_1 und λ nur in dieser Verbindung auftreten. Aus den von uns reproduzierten Kurven (dies gilt ganz allgemein auch dann, wenn die beugende Kugel nicht auf der Achse liegt), lassen sich dann die von Mie angegebenen Kurven für ebene einfallende Wellen sehr leicht so ergänzen, daß sie für beliebige Bündel der Form 1 die ausgestrahlte Intensität angeben. Denn es handelt sich in allen Fällen nur darum, zu untersuchen, wie der Faktor $|2G_{00} + G_{20}|^2$ die Intensität beeinflusst. Wünscht man diesen Effekt für eine bestimmte Wellenlänge und für eine bestimmte Lage der beugenden Kugel zu ermitteln, so hat man nur die bei der fraglichen Wellenlänge in Mies Kurven auftretende Intensität mit derjenigen Größe zu multiplizieren, die man bei dem fraglichen Wert von r_1/λ aus unseren Kurven entnimmt.

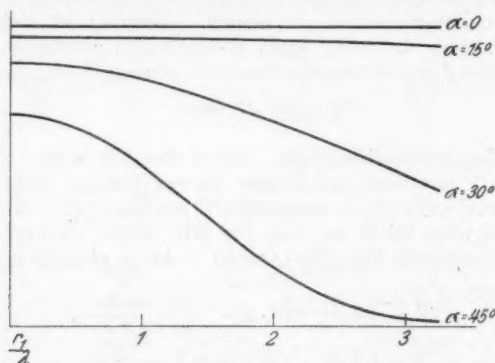


Fig. 1. Darstellung des Faktors $|2G_{00} + G_{20}|^2$, wenn das Teilchen auf der Achse des Bündels liegt, bei verschiedenen Öffnungswinkeln α des Lichtkegels. Bei festgehaltenem Wert der Wellenlänge geben diese Kurven direkt den Verlauf der gestreuten Intensität als Funktion der Entfernung der beugenden Kugel vom Brennpunkte an

Die Fig. 1 stellt die Verhältnisse für den Fall dar, daß die Kugel auf der Achse liegt, und zwar haben wir für drei verschiedene Öffnungswinkel ($\vartheta_n = 15, 30, 45^\circ$) den Faktor $|2G_{00} + G_{20}|^2$ graphisch dargestellt. Es zeigt sich, daß abgesehen von einer kleinen Änderung der Gesamtintensität bei kleinen Öffnungen eine Abhängigkeit der ausgestrahlten Intensität von der Lage der beugenden Kugel auf der Achse kaum existiert; erst bei einem Winkel von 45° macht sich eine solche ein wenig bemerkbar.

Ferner behandeln wir den Fall, daß das Teilchen auf der geometrisch-optischen Grenze des Bündels liegt. Unter Benutzung der Rekursionsformel (67) ergibt sich für unseren Faktor $|2G_{00} + G_{20}|^2$ bei Benutzung eines Bündels mit einem Öffnungswinkel von 45° :

$$(75) \quad \left| 2G_{00} - \frac{1}{6}G_{22} + \frac{e^{\frac{ikr_1}{2}}}{kr_1\sqrt{2}} \left\{ iJ_2\left(\frac{kr_1}{2}\right) + J_1\left(\frac{kr_1}{2}\right) \right\} \right|^2.$$

Liegt das Teilchen aber in der zur Lichtachse senkrechten Ebene, so ergibt sich für den fraglichen Faktor:

$$(76) \quad \left| 2G_{00} + \frac{1}{6}G_{22} + \frac{1}{2kr_1}J_1\left(\frac{kr_1}{\sqrt{2}}\right) \right|^2.$$

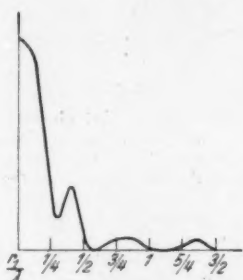


Fig. 2a. Darstellung des Faktors $|2G_{00} + G_{20}|^2$ für ein Bündel mit dem Öffnungswinkel $\alpha = 45^\circ$ als Funktion der Entfernung der beugenden Kugel auf dem Rande des Kegels

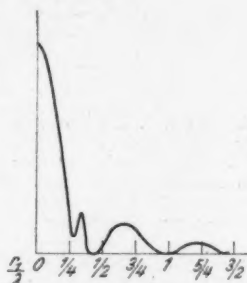


Fig. 2b. Darstellung des Faktors $|2G_{00} + G_{20}|^2$ für ein Bündel mit dem Öffnungswinkel $\alpha = 45^\circ$ als Funktion der Entfernung der beugenden Kugel auf derjenigen zur Lichtachse senkrechten Ebene, die durch den Brennpunkt des Bündels geht

Die auf diese Weise errechneten Kurven sind in der Fig. 2 dargestellt. Bemerkenswert an ihnen ist vor allem der steile Abfall innerhalb eines sehr kleinen Bereiches in der Nähe des Brennpunktes, wie man ihn auch erwarten sollte. Das für uns wichtige ist nun, daß in solchen Gebieten, in denen wir auf kurzen Strecken einen starken Abfall haben, bemerkenswerte Farbänderungen auftreten müssen. Um dies zu zeigen, zeichnen wir zuerst die durch (62) dargestellte Größe \bar{I}/v^2 für den Fall, daß die Kugel mit ihrem Mittelpunkt im Brennpunkt des Bündels liegt. Dabei ergibt sich, daß der Faktor $|2G_{00} + G_{20}|^2$ unabhängig von der Wellenlänge wird, wie man leicht aus der Gl. (58) ersehen kann. Die von uns gezeichnete Kurve stimmt daher vollkommen mit der überein,

die man bei Benutzung ebener einfallender Wellen erhalten muß, abgesehen von einem willkürlichen Intensitätsfaktor. Das sieht man auch sofort, wenn man die oberste Kurve der Fig. 3 mit der von Mie gefundenen vergleicht. Die mittlere der Kurven der Fig. 3 stellt dann den Fall dar, daß das Teilchen in einer Entfernung von $100\ \mu\mu$ in der achsensenkrechten

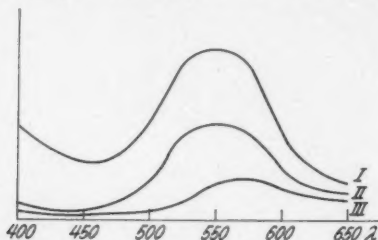


Fig. 3. Die Rayleighsche Gesamtstrahlung (Kurve I) bei einfallender ebener Welle und ihre Veränderung, wenn ein konvergentes Bündel einfällt. Der Mittelpunkt der beugenden Kugel liegt bei Kurve II $100\ \mu\mu$ vom Brennpunkt entfernt in der durch den Brennpunkt gehenden achsensenkrechten Ebene, während die Kurve III für die gleiche Lage bei einer Entfernung der Kugel von $130\ \mu\mu$ vom Brennpunkt gilt

Ebene liegt. Man erkennt, daß eine starke Herabsetzung der Gesamtintensität eingetreten ist, die aber nicht für alle Wellenlängen gleichmäßig ist. Am stärksten bemerkt man aber diese Erscheinung an der dritten Kurve, bei der neben einer weiteren Herabminderung der Intensität auch deutlich eine Verschiebung des Maximums nach größeren Wellenlängen zu beobachten ist.

Gerade dieses Ergebnis erscheint uns in mancher Hinsicht interessant. Denn es gestattet eine Erklärung der Farbänderungen, die bei stärker konzentrierten kolloidalen Lösungen beobachtet werden können, und die durch Mies ursprüngliche Theorie nicht geliefert werden. Man muß nämlich beachten, daß in starken Konzentrationen jede der beugenden Kugeln nicht der einfallenden Welle allein, sondern auch noch der Wirkung der Beugungswelle von den benachbarten Teilchen ausgesetzt ist. Ein solcher Zustand kann nun mit sehr guter Annäherung durch einen Ansatz dargestellt werden, der dem von uns benutzten Ansatz 1 analog ist. Denn das allgemeine Integral für periodische im Endlichen überall endliche Wellenvorgänge hat nach Whittaker, Picht u. a. die Form:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \gamma} f(\vartheta_0, \varphi_0) d\Omega_0.$$

Die Lichtzerstreuung, die ein solches Feld an einem Kügelchen hervorruft, kann natürlich in genau der gleichen Weise berechnet werden, wie hier die Streuwelle, die durch den durch Gl. (1) definierten Lichtzustand hervorgerufen wird. Es ist daher zum mindesten plausibel, daß durch nähere Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der beugenden Teilchen untereinander eine Farbtheorie für konzentrierte kolloidale Lösungen mit Erfolg durchgeführt werden kann.

Anhang

Tabelle 1

Intensität als Funktion der Wellenlänge
(Kugelmateriale ist Gold, das umgebende Medium Wasser)
 \bar{I}/v^2 = Rayleighsche Gesamtstrahlung
 q = Abstand der beugenden Kugel vom Brennpunkt

$q = 0$		Kugel in der $x_1 y_1$ -Ebene			
		$q = 100 \mu\mu$		$q = 130 \mu\mu$	
λ	\bar{I}/v^2	λ	\bar{I}/v^2	λ	\bar{I}/v^2
420	1,294	420	0,2335	420	0,143
450	0,942	450	0,290	450	0,110
500	1,554	500	0,709	500	0,181
525	2,390	525	1,242	525	0,279
550	2,674	550	1,475	550	0,596
600	1,340	600	0,824	600	0,511
650	0,634	650	0,430	650	0,289

Tabelle 2

$F = |2G_{00} + G_{20}|^2$
Kugel auf der Achse des Bündels

$\vartheta_0 = 45^\circ$		$\vartheta_0 = 30^\circ$		$\vartheta_0 = 15^\circ$	
r_1/λ	F	r_1/λ	F	r_1/λ	F
0	6,394	0	7,885	0	8,701
$1/4$	6,309	$1/4$	7,864	$1/2$	8,683
$1/2$	5,958	$1/2$	7,77	1	8,666
$3/4$	5,445	$3/4$	7,629	2	8,565
1	4,801	1	7,432	3	8,447
$5/8$	4,420	$5/4$	7,185		
$5/4$	4,036	$3/2$	6,887		
$3/2$	3,247	2	6,193		
$7/4$	2,475	2,5	5,375		
2	1,768	3	4,492		
2,5	0,687				
3	0,131				

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Kugel auf dem Rand eines Kegels vor der Öffnung $\vartheta_0 = 45^\circ$.

r_1/λ	F	r_1/λ	F	r_1/λ	F
$\frac{1}{8}$	5,7	$\frac{5}{8}$	0,0905	$\frac{9}{8}$	0,0112
$\frac{1}{4}$	2,10	$\frac{3}{4}$	0,370	$\frac{5}{4}$	0,212
$\frac{3}{8}$	1,686	$\frac{7}{8}$	0,40	$\frac{11}{8}$	0,3553
$\frac{1}{2}$	0,326	1	0,115		

Kugel in der $x_1 y_1$ -Ebene (achsensenkrechte Ebene durch den Brennpunkt) ebenfalls für $\vartheta_0 = 45^\circ$

r_1/λ	F	r_1/λ	F	r_1/λ	F
$\frac{1}{10}$	5,99	$\frac{11}{10}$	1,33	$\frac{7}{5}$	0,211
$\frac{3}{10}$	4,88	$\frac{8}{5}$	0,108	1	0,009
$\frac{2}{5}$	3,377	$\frac{1}{2}$	0,305	$\frac{9}{5}$	0,249
$\frac{1}{4}$	0,757	$\frac{5}{10}$	0,973	$\frac{5}{4}$	0,34
$\frac{9}{10}$	0,623	$\frac{3}{4}$	0,827	$\frac{11}{5}$	0,131
$\frac{2}{10}$	0,736				

Berlin-Lichterfelde.

(Eingegangen 21. Mai 1933)

Die Temperatur des Beginns der Graustrahlung von Metallen, Oxyden und Sulfiden

Von G. Tammann und W. Boehme

Erhitzt man einen festen Körper, so beginnt seine Lichtemission mit einer flimmernden Graustrahlung, die bei weiterer Temperatursteigerung heller wird und schließlich in ein mattes Rot übergeht.¹⁾ Für eine Reihe von Salzen wurde früher²⁾ die Temperatur des Beginns der Graustrahlung der zuvor geschmolzenen oder hocheerhitzten Salze bestimmt. Diese Temperaturen liegen zwischen 280 und 390°. Zerreibt man das aus der Schmelze kristallisierte oder zuvor hocheerhitzte Salz, so beginnt es bei Temperaturen grau zu strahlen, welche in der Regel 50—150° tiefer liegen als die Temperaturen des Beginns der Graustrahlung im natürlichen Zustande.

Von der Korngröße wird die Temperatur des Beginns der Graustrahlung nicht beeinflusst, wenn das betreffende Pulver zuvor hinreichend hoch erhitzt wurde. Es wurden Pulver verschiedener Korngrößen aus NaCl oder MoO₃ hergestellt, darauf wurden sie auf 500° erhitzt und dann die Temperatur des Beginns ihrer Graustrahlung, wie früher²⁾ beschrieben, bestimmt. Aus der folgenden Tabelle ist zu ersehen, daß die Temperatur des Beginns der Graustrahlung von der Korngröße nicht abhängt.

Korndurchmesser in mm	Beginn der Graustrahlung	
	NaCl in °	MoO ₃ in °
1—2	390	380
0,2—0,4	389	383
0,05—0,001	392	380

Zerriebene Salze beginnen bei erheblich tieferen Temperaturen grau zu strahlen als dieselben Stoffe nach hinreichend

1) Die diesbezüglichen Beobachtungen von H. F. Weber, Wied. Ann. **32**. S. 256. 1887 wurden von O. Lummer, Wied. Ann. **62**. S. 14. 1897 auf Grund der Theorie von I. v. Kries gedeutet.

2) G. Tammann, F. Neubert u. W. Boehme, Ann. d. Phys. [5] **15**. S. 317. 1932.

hohem Erhitzen im natürlichen Zustande. Es ist zu erwarten, daß mit wachsender Kaltbearbeitung, mit der Dauer des Zerreibens, die Temperatur des Beginns der Graustrahlung sinken wird. Es wurde früher gezeigt, daß nach 10 Min. langem Zerreiben die Temperatur des Beginns der Graustrahlung nicht mehr sinkt. Die einzelnen Körner werden beim Zerreiben einer sehr verschiedenen Kaltbearbeitung unterworfen, daher ist zu erwarten, daß die Körner, welche durch die Kaltbearbeitung am stärksten verändert werden, bei tieferen Temperaturen grau zu strahlen beginnen werden als die weniger veränderten. Wenn ferner die Erholung von der Kaltbearbeitung schon bei Temperaturen unterhalb der Temperatur des Beginns der Graustrahlung im natürlichen Zustande eintritt, so sollte die Graustrahlung des kaltbearbeiteten, zerriebenen Pulvers bei Temperaturen unterhalb der des Beginns der Graustrahlung im natürlichen Zustande mit der Zeit verschwinden, und zwar um so schneller, je höher die betreffende Temperatur liegt. Daß das zutrifft, ist aus folgender Tabelle zu ersehen. Von einer Portion des 10 Min. lang zerriebenen Stoffes wurden Teile in den elektrischen Ofen gebracht, der auf die angegebenen Temperaturen erhitzt war, und die Zeit bestimmt, nach der die Graustrahlung verschwand. Wenn die Temperatur des Beginns der Graustrahlung des natürlichen Zustandes überschritten wird, so konnte die Graustrahlung noch stundenlang beobachtet werden.

° C	NaCl in Min.	KCl in Min.	° C	WO ₃ in Min.
290	17	15	210	7
310	10	13,5	230	6,5
330	8,5	12	250	5,5
350	8,0	11	270	4
380	7,0	9,5	290	3

Metalle

Die Intensität der Graustrahlung von Metallen ist viel geringer als die von durchsichtigen Salzen und Oxyden. Auch das ausgeruhete Auge erkennt nur mit Mühe den Beginn der Graustrahlung. Bei Steigerung der Temperatur nimmt auch bei den Metallen die Graustrahlung deutlich zu. Bei 415° beginnt das Ofenrohr aus K-Masse schon schwach grau zu strahlen und schon bei 430° übertrifft die Graustrahlung des Ofenrohres die des betreffenden Metallplättchens. Die Temperaturen des Beginns der Graustrahlung wurden für einige edle

Metalle im harten Zustande für nicht polierte Metallplättchen mit einem Walzgrad von 80% und für dieselben Walzplättchen im weichen Zustande bestimmt. Harte Au- oder Ag-Plättchen werden schon unterhalb der Temperatur des Beginns der Graustrahlung weich. Da das Erhitzen des harten Au-Plättchens von 100° bis etwa 400° 15 Min. dauerte, so mag seine Erholung von der Kaltbearbeitung sich noch nicht vollständig vollzogen haben und daher die Temperatur des Beginns der Graustrahlung des harten Plättchens etwas tiefer liegen als die des ausgeglühten. Da das Ag-Plättchen sich vor dem Beginn seiner Graustrahlung schon vollständig erholt hatte, so liegt der Unterschied der Temperatur der Graustrahlung für den weichen und den ursprünglich harten Zustand innerhalb der Beobachtungsfehler.

Beim Pd und erst recht beim Pt liegen die Temperaturen des Beginns der Graustrahlung erheblich tiefer als das Temperaturintervall, in dem sich die durch Kaltbearbeitung erhöhte Härte erholt. Beim Pd liegt dieses Intervall zwischen 400 und 600°, beim Pt zwischen 800 und 1000°. Die Temperatur des Beginns der Graustrahlung ist im harten Zustande beim Pt und Pd nur um etwa 10° tiefer als für den weichen Zustand.

R. Emden¹⁾ hat dieselben Metalle untersucht und Temperaturen der Graustrahlung gefunden, die um etwa 25–37° höher lagen als die jetzt gefundenen der Plättchen im harten Zustande. Der Grund dieser Differenz ist wohl in der verschiedenen Beobachtungsanordnung zu suchen.

	weich in °	hart in °	R. Emden in °
Au	398	390	423
Ag	378	376	415
Pt	376	365	408
Pd	384	376	408

Oxyde

Die Intensität der Graustrahlung der Oxyde ist wie die der Salze erheblich größer als die der Metalle.

Die Oxyde wurden 10 Min. lang in der Reibschale zerrieben, wodurch ein mittlerer Korndurchmesser von etwa 0,001 mm entstand. Ein Teil des Pulvers wurde auf etwa 600° erhitzt, um ihn in den natürlichen Zustand überzuführen. Darauf

1) R. Emden, Wied. Ann. 36. S. 234. 1889.

wurden die Temperaturen des Beginns der Graustrahlung bestimmt. Für die nicht zuvor erhitzten Pulver wurde nach der ersten Bestimmung der Temperatur des Beginns der Graustrahlung die Temperatur der Probe um etwa 100° gesenkt und nochmals die Temperatur des Beginns der Graustrahlung bestimmt. Nach abermaliger Abkühlung um 100° wurde nochmals eine Bestimmung der Temp. des Beginns der Graustrahlung vorgenommen.

Da während des Erhitzens und des Abkühlens eine Erholung von der Kaltbearbeitung erfolgt, so steigt in der Regel die Temperatur der Graustrahlung bei der 2. und 3. Erhitzung auf die Temperatur der Graustrahlung im natürlichen Zustande an. Beim CaO , Al_2O_3 , La_2O_3 , PbO , MoO_3 , WO_3 und UO_2 wird die Temperatur des Beginns der Graustrahlung im natürlichen Zustande noch nicht erreicht.

	Temp. der Graustrahl. im natürl. Zustande in $^{\circ}$	gepulvert in $^{\circ}$			Erniedri- gung der Grau- strahlung in $^{\circ}$	Gruppen der Elemente (h) Haupt- (n) Neben-
		1.	2.	3.		
$\text{CuO} \dots$	230	207	229	228	23	I n
$\text{BeO} \dots$	210	200	205	208	10	I h
$\text{MgO} \dots$	261	259	260	261	2	
$\text{CaO} \dots$	390	254	293	324	36	II n
$\text{ZnO} \dots$	280	272	275	277	8	
$\text{Al}_2\text{O}_3 \dots$	285	270	268	271	15	III h
$\text{Y}_2\text{O}_3 \dots$	260	242	253	259	18	
$\text{La}_2\text{O}_3 \dots$	290	228	247	248	62	IV n
$\text{SiO}_2 \dots$	238	218	220	—	20	
$\text{SnO}_2 \dots$	346	306	340	344	40	IV h
$\text{PbO} \dots$	370	261	306	331	109	
$\text{ZrO}_2 \dots$	263	220	255	256	43	V n
$\text{ThO}_2 \dots$	320	310	317	320	10	
$\text{Bi}_2\text{O}_3 \dots$	387	371	385	384	16	V h
$\text{Vd}_2\text{O}_5 \dots$	362	344	347	359	18	
$\text{Ta}_2\text{O}_5 \dots$	324	255	317	324	69	VI h
$\text{Cr}_2\text{O}_3 \dots$	383	362	375	380	21	
$\text{MoO}_3 \dots$	384	317	350	374	67	VIII
$\text{WO}_3 \dots$	306	202	293	300	104	
$\text{UO}_2 \dots$	242	213	215	228	29	
$\text{Fe}_2\text{O}_3 \dots$	330	269	320	—	61	
$\text{Co}_3\text{O}_4 \dots$	289	270	282	290	19	
$\text{NiO} \dots$	339	261	330	334	78	

Die Temperatur des Beginns der Graustrahlung wächst mit wachsendem Atomgewicht des in ihm enthaltenen Metalles in einigen natürlichen Familien im engeren Sinne des periodi-

schen Systemes an, und zwar gilt das sowohl für die Neben- (n) als auch für die Hauptgruppen (h) der natürlichen Familien bis inklusive der IV. Gruppe. Bei den Oxyden der natürlichen Familien im engeren Sinne der V. und VI. Gruppe nimmt dagegen mit wachsendem Atomgewicht die Temperatur des Beginns der Graustrahlung ab.

Sulfide

Die Sulfide wurden in dem mit einer Glasplatte bedeckten Röhrenofen in der Luft erhitzt. Schon bei etwa 100° bildete sich ein Sublimat von Schwefel am Glasplättchen, und der Geruch von SO_2 wurde deutlich. Bei weiterer Temperatursteigerung trat der Beginn der Graustrahlung ein, aber gleich darauf entstand im bedeckten Ofen ein schwaches, bald erlöschendes Licht, welches der kalten Schwefelflamme zuzuschreiben ist. Bei weiterer Temperatursteigerung um etwa $100\text{--}200^{\circ}$ erschien dann im Ofen auf kurze Zeit die normale hellblaue Schwefelflamme. Obwohl das Auge vor dem Erscheinen der schwachen blauen Flamme den zu untersuchenden Stoff als Graustrahler empfindet, so konnte doch diese Graustrahlung durch eine Chemilumineszenz an den Sulfiden bedingt sein.

Die Intensität der Graustrahlung der undurchsichtigen Sulfide, bis auf Bleiglanz, ist wie die der Metalle bedeutend geringer als die der Salze oder Oxyde.

Zur Bestimmung der Temperatur des Beginns der Graustrahlung im natürlichen Zustande gelangten die Erze Bleiglanz, Pyrit und Grauspießglanzerz in gröberen Stücken, die zuvor nicht erhitzt worden waren. Dasselbe gilt für die künstlich hergestellten Sulfide.

Zur Bestimmung des Einflusses der Kaltbearbeitung der Sulfide wurden sie im Porzellanmörser auf einen mittleren Korndurchmesser von $0,005\text{ mm}$ gebracht.

Aus der folgenden Tabelle ist zu ersehen, daß die Temperaturen des Beginns der Graustrahlung, innerhalb der Fehlergrenze von $\pm 3^{\circ}$, durch Zerreiben nur wenig beeinflusst werden. Nur beim Bleiglanz ist ein erniedrigender Einfluß des Zerreibens, der außerhalb der Fehlergrenze der Temperaturbestimmung des Beginns der Graustrahlung fällt, vorhanden. Beim Bleiglanz steigt die Temperatur des Beginns der Graustrahlung nach dem zweiten und dritten Erhitzen deutlich an.

	Temp. der Graustrahlung im natürlichen Zustande in °	gepulvert in °			Erniedri- gung der Grau- strahlung in °
		1.	2.	3.	
Pyrit FeS_2	220	216	214	215	4
FeS	226	220	222	228	6
Sb_2S_3	270	265	272	270	5
Ag_2S	300	299	301	304	1
MnS	320	315	311	300	5
Bi_2S_3	350	348	345	350	2
Bleiglanz PbS . . .	381	329	348	364	52

Göttingen, Institut für physikalische Chemie.

(Eingegangen 1. Juni 1933)

Druckfehlerberichtigung

In der Arbeit von V. Fock „Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung“, *Ann. d. Phys.* [5] 17. S. 401. 1933, muß auf S. 413 im Ausdruck (61) für $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0$ der Faktor vor der geschweiften Klammer $\frac{k^2 - k'^2}{4}$ (und nicht $\frac{k^2 + k'^2}{4}$) lauten. Der richtige Ausdruck ist also:

$$(61) \quad \left\{ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^2 - k'^2}{4} \left\{ I_0 \left(\rho \frac{k - k'}{2} \right) K_0 \left(\rho \frac{k + k'}{2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - I_2 \left(\rho \frac{k - k'}{2} \right) K_2 \left(\rho \frac{k + k'}{2} \right) \right\} \right\}.$$

(Eingegangen 24. Juli 1933)

Durchgang schneller Korpuskularstrahlen durch ein Ferromagnetikum

Von C. F. v. Weizsäcker¹⁾

(Mit 1 Figur)

Inhalt: I. Magnetische Ablenkung: § 1. Die vorliegenden Experimente; § 2. Diskussion nach der klassischen Theorie; § 3. Diskussion nach der Quantentheorie; § 4. Berechnung der mittleren Ablenkung in erster Näherung; § 5. Zweite Näherung. — II. Bremsung durch die freien Metallelektronen: § 1. Qualitative Überlegungen; § 2. Durchrechnung.

I. Magnetische Ablenkung

§ 1. Die vorliegenden Experimente

Rossi²⁾ und Mott-Smith³⁾ haben versucht, die starke magnetische Induktion, die im Innern eines Ferromagnetikums herrscht, für die Energiebestimmung der Höhenstrahlungsteilchen nutzbar zu machen, indem sie bei einem Bothe-Kolhörsterschen Koinzidenzversuch in den Weg der Strahlen zwischen zwei Zählrohren ein Stück Eisen einschoben. Beim Durchfliegen des Eisens mußten die geladenen Teilchen, die die Zählrohrkoinzidenzen verursachen, je nach Stärke und Richtung der Magnetisierung verschieden abgelenkt werden, und dadurch mußte sich — in der ursprünglichen einfachsten Anordnung — die für das Auftreten von Koinzidenzen günstigste Lage der Zählrohre verschieben. Später verwendete Rossi zwei nebeneinander gestellte entgegengesetzt magnetisierte Eisenstücke, welche die durch das erste Zählrohr gegangenen Teilchen analog einer Sammel- bzw. Zerstreulinse entweder im zweiten Zählrohr vereinigen oder von ihm weg zerstreuen sollten. Obwohl die Induktion jeweils die Größenordnung von 17000 Gauss hatte, ließ sich in keinem der Versuche eine Ablenkung mit Sicherheit feststellen. Als untere Grenze für die

1) Leipziger Dissertation.

2) B. Rossi, Rend. Lincei 11. S. 478. 1930; Nature 128. S. 300. 1931.

3) L. M. Mott-Smith, Phys. Rev. 37. S. 1001. 1931; 39. S. 403. 1932.

Energie der für die Koinzidenzen verantwortlichen Teilchen schien daraus unter Berücksichtigung der Länge des im Eisen durchlaufenen Weges und der Meßgenauigkeit nach Mott-Smith 10^9 , nach Rossi sogar 10^{10} Elektronenvolt zu folgen.

Dieser Schluß war jedoch nicht zwingend, so lange die Frage nicht eindeutig beantwortet war, ob überhaupt die magnetische Induktion \mathfrak{B} für die Ablenkung maßgebend ist und nicht vielmehr das magnetische Feld \mathfrak{H} , das nur von den „freien magnetischen Ladungen“ an der Oberfläche des Eisens herrührt und deshalb im Innern auch nur von der Größenordnung einiger Gauss ist. Es zeigte sich, daß diese Frage nicht mit Hilfe der phänomenologischen Maxwell'schen Theorie beantwortet werden kann, da die Entscheidung davon abhängt, welches Modell man für die atomaren Elementarmagnete des Eisens wählt — ob man sie sich als kleine Kreisströme oder etwa als echte magnetische Dipole vorstellt. Nun wissen wir nach Heisenberg, daß das quantentheoretische Phänomen des Elektronenspins für den Ferromagnetismus verantwortlich ist; deshalb ist es zur strengen Beantwortung dieser Frage notwendig, die Ablenkung geladener Teilchen durch Elektronen von gegebener Spinrichtung nach der Dirac'schen Theorie des Elektrons zu berechnen. Diese Rechnung ist in §§ 3—5 der vorliegenden Arbeit durchgeführt. Als wirksames Feld ergibt sich die Induktion \mathfrak{B} ; von dieser Seite her besteht also gegen die Brauchbarkeit der Methode zur Energiebestimmung kein Einwand.

Inzwischen haben aber Millikan und Anderson¹⁾ und Kunze²⁾ die magnetische Ablenkung der Höhenstrahlungsteilchen in der Wilsonkammer untersucht und zahlreiche Teilchen von geringerer als der von Rossi und Mott-Smith angegebenen Minimalenergie gefunden; nach Kunze hat die Hälfte aller beobachteten Teilchen eine Energie unter $2,5 \cdot 10^8$ Volt. Der Widerspruch zwischen beiden Resultaten ist jedoch zum mindesten weniger direkt, als es hiernach scheinen könnte, denn Teilchen von zu geringer Energie können das Eisen gar nicht mehr durchdringen und werden daher zwar abgelenkt, aber nicht mehr beobachtet. Da (in erster Näherung) sowohl die zum Durchdringen des Eisens nötige Energie wie die magnetische Ablenkung linear mit der Dicke des Eisenstückes anwächst, ist dieser Auswahleffekt von der Eisendicke unabhängig.

1. R. A. Millikan u. C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **40**. S. 325. 1932; C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **41**. S. 405. 1932.

2) P. Kunze, *Ztschr. f. Phys.* **79**. S. 203, 1932; **80**. S. 559. 1933.

Mit wachsender Dicke werden zwar immer energiereichere Teilchen merklich abgelenkt, aber immer höhere Energien sind auch notwendig, damit ein Teilchen überhaupt noch in das zweite Zählrohr gelangt; es muß daher für die beobachtbaren Ablenkungswinkel eine nur von der Magnetisierung abhängige obere Grenze existieren. Nach Heisenberg¹⁾ haben Elektronen der Energie $1000 \text{ mc}^2 \approx 5 \cdot 10^8 \text{ Volt}$ in Eisen eine Reichweite von ungefähr 18 cm; auf dieser Strecke würden sie durch ein Feld von 17000 Gauss um etwa 8° abgelenkt werden. Größere Winkelablenkungen können also nicht beobachtet werden. Es ist daher klar, daß in einer Zählrohranordnung, die sehr viel schnellere Teilchen noch abzulenken gestattet, die in der Wilsonkammer beobachteten energieärmeren Teilchen garnicht in Erscheinung treten können.

Ungeklärt bleibt aber, warum Rossi und Mott-Smith nicht wenigstens den Teil des nach Ausweis der Wilsonaufnahmen völlig kontinuierlichen Energiespektrums finden, der zwischen den beiden Grenzen der noch nicht durchdringenden und der nicht mehr ablenkbaren Teilchen liegt. Allerdings würde bei der Fokussierungsanordnung von Rossi dann kein merklicher Effekt zu erwarten sein, wenn auch bei den höchsten Energien (so wie nach Ausweis der Wilsonaufnahmen bei den niedrigeren) positiv und negativ geladene Teilchen in ungefähr gleicher Anzahl in der Höhenstrahlung vorkämen; denn diese Anordnung muß notwendigerweise gleichzeitig die Ladungen des einen Vorzeichens vereinigen, die des anderen zerstreuen. Dagegen müßte bei der ursprünglichen Anordnung jedenfalls eine Verbreiterung des Gebietes eintreten, in dem das untere Zählrohr noch Koinzidenzen liefert. Das Ausbleiben dieses Effektes müssen wir wohl mit Kunze dahin deuten, daß die bisherigen Apparaturen keine hinreichend genaue Winkelmessung innerhalb des oben angegebenen Bereichs von allerhöchstens $\pm 8^\circ$ erlauben. Dieser Grenzwinkel könnte auch in der Wirklichkeit noch kleiner sein, denn die Formel von Heisenberg, nach der er hier berechnet ist, stellt eine Extrapolation der Bremsformeln von Bethe²⁾ und Møller³⁾ in ein Gebiet dar, in dem sie wegen der Vernachlässigung der Strahlungskräfte sowie wegen der willkürlichen Annahmen über den Beitrag der

1) W. Heisenberg, Ann. d. Phys. 13. S. 430. 1932 [Formeln (19) und (20)].

2) H. Bethe, Ann. d. Phys. 5. S. 325. 1930 (I); Ztschr. f. Phys. 76. S. 293. 1932 (II).

3) Chr. Møller, Ztschr. f. Phys. 70. S. 786. 1931 (I); Ann. d. Phys. [5] 14. S. 531. 1932 (II).

Kernelektronen zur Bremsung wohl um einen Faktor 2 falsch werden können. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird außerdem die weitergehende Vermutung untersucht, daß schon diese Bremsformeln selbst für die Bremsung in Metallen modifiziert werden müßten, weil sie die bremsenden Elektronen — im Gegensatz zu dem, was wir über die Leitungselektronen der Metalle wissen — als fest an Atome gebunden behandeln; dabei zeigt sich jedoch, daß, außer für die leichtesten Metalle, keine merklichen Abweichungen aus diesem Grunde zu erwarten sind.

§ 2. Diskussion nach der klassischen Theorie

Zur Klärung der quantentheoretischen Problemstellung sollen hier zunächst einige bekannte Ergebnisse der klassischen Theorie zusammengestellt werden.

Zur Berechnung der Ablenkung brauchen wir das mittlere Magnetfeld, das im Innern eines Ferromagnetikums auf ein geladenes Teilchen wirkt. Dabei haben wir zu unterscheiden zwischen den durch ihre Wirkung auf einen *makroskopischen* Probekörper definierten *phänomenologischen* Feldgrößen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} , zu deren Messung im Innern des Eisens geeignet geformte Materiestücke ausgeschnitten werden müßten, und dem *wahren* Feld im Sinne der Elektronentheorie \mathfrak{H}' , das sich durch seine Wirkungen auf einen *atomaren* Probekörper äußert. Wir kennen aus makroskopischen Messungen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} und suchen \mathfrak{H}' . Die Kraft auf ein Teilchen der Ladung e und der Geschwindigkeit v ist dann

$$(1) \quad \mathfrak{K} = \frac{e}{c} [v \mathfrak{H}'].$$

Die phänomenologischen Feldgrößen sind durch die Gleichung

$$(2) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}$$

(\mathfrak{M} = Magnetisches Moment pro Volumeneinheit) verknüpft. Um aus ihnen \mathfrak{H}' herzuleiten, brauchen wir ein Modell der atomaren Elementarmagnete, deren Parallelstellung die beobachtete Magnetisierung erzeugt. Wir können sie uns entweder als elektrische Kreisströme denken, die in großem Abstand wie magnetische Dipole vom Moment \mathfrak{M}/N (N = Anzahl pro Volumeneinheit) wirken, oder ein rein magnetisches Modell, etwa das von wahren magnetischen Dipolen wählen.

\mathfrak{H}' wird im Innern des Eisens nicht räumlich konstant sein, sondern Schwankungen mit der Periode des Atomgitters unterliegen. Wir interessieren uns nur für das mittlere Feld $\bar{\mathfrak{H}'}$

und vergleichen dieses mit \mathfrak{B} und \mathfrak{H} , indem wir das Integral über einen geschlossenen Weg betrachten, der zur Hälfte im Innern des zylindrisch gedachten Eisenstückes, zur Hälfte im Außenraum verläuft und die Mantelfläche umschließt. Bekanntlich ist

$$(3) \oint \mathfrak{H}' d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{c} J',$$

wenn J' die Stärke des vom Integrationsweg umschlossenen Stromes ist. Wählen wir nun das Modell atomarer Kreisströme, so müssen wir beachten, daß die mittlere Stromdichte

überall im Innern des Eisens verschwindet und nur auf der Mantelfläche ein Kreisstrom übrigbleibt, dessen Gesamtstromstärke so zu bestimmen ist, daß sein magnetisches Moment gleich dem totalen Moment des Eisens wird. Ist die Länge des Eisenstückes l , sein Querschnitt Q , und sein Volumen $lQ = V$, so muß demnach

$$(4) \frac{Q J'}{c} = V |\mathfrak{M}|,$$

also

$$(5) \frac{J'}{c} = l |\mathfrak{M}|$$

gesetzt werden. Aus (3) und (5) folgt schließlich

$$(6) \oint \mathfrak{H}' d\mathfrak{s} = 4\pi l |\mathfrak{M}|.$$

Andererseits fließt im Sinne der phänomenologischen Definition kein Strom, und aus (2) ergibt sich daher

$$(7) \oint \mathfrak{B} d\mathfrak{s} = 4\pi \oint \mathfrak{M} d\mathfrak{s} = 4\pi l |\mathfrak{M}|,$$

letzteres, da \mathfrak{M} im Innenraum konstant ist und im Außenraum verschwindet. Aus (6) und (7) folgt

$$(8) \overline{\mathfrak{H}'} = \mathfrak{B};$$

wenn der Magnetismus durch Kreisströme erzeugt wird, ist das wirksame Feld die magnetische Induktion \mathfrak{B} . Umgekehrt ist

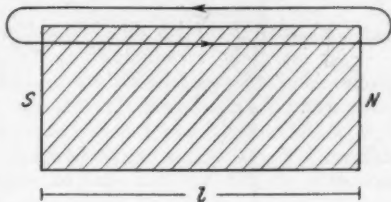


Fig. 1. Integrationsweg in Gl. (3)–(9)

leicht zu sehen, daß für ein *rein magnetisches* Modell $\vec{S}' = \vec{S}$ ist; denn hier fließt kein wahrer Strom und es ist daher

$$(9) \quad \oint \vec{S}' d\vec{s} = \oint \vec{S} d\vec{s} = 0,$$

das wirksame Feld ist das Magnetfeld \vec{S} .

Es ist nicht verwunderlich, daß sich die beiden nur für große Abstände gleichwertigen Modelle in ihrer Wirkung auf Höhenstrahlungsteilchen, die den Elementarmagneten sehr nahe kommen können, voneinander unterscheiden. Im Fall eines wahren Dipols kann das Teilchen zwischen oder nahezu zwischen dessen beiden magnetischen Ladungen hindurchfliegen und durch diese seltenen, aber großen Ablenkungen die mittlere Asymmetrie der Ablenkung in großen Abständen kompensieren (es ist einleuchtend, daß das Dipolfeld, als Überlagerung zweier symmetrischer Felder, bis auf Effekte, die von der Oberfläche des betrachteten Gebietes — hier des Eisenstückes — herühren, keine Asymmetrie in der mittleren Ablenkung erzeugen kann); bei einem Kreisstrom besteht eine derartige Möglichkeit nicht. Man sieht daraus aber auch, daß der Effekt um seine eigene Größenordnung geändert werden könnte, wenn etwa der Raum in der nächsten Nachbarschaft der Elementarmagnete dem Teilchen durch irgendwelche Vorgänge versperrt würde (nur wenn alle Raumelemente dem Teilchen mit derselben statistischen Wahrscheinlichkeit zugänglich sind, dürfen wir ja den räumlichen Mittelwert des Feldes dem über die Bahn des Teilchens gleichsetzen). In kleine undurchdringliche Kugeln eingeschlossen würden Dipole und Kreisströme nahezu dieselbe Wirkung ergeben. Eine sehr ähnliche Wirkung wie eine derartige undurchdringliche Kugel könnte aber z. B. das Ausweichen der Elektronen, deren Spin für den Ferromagnetismus verantwortlich ist, infolge der Coulombschen Wechselwirkung bei sehr nahen Zusammenstößen haben.

Die nachfolgende Rechnung hat daher, anschaulich ausgedrückt, die folgenden beiden Fragen zu beantworten:

1. Verhält sich der Elektronenspin in unserem Problem wie ein Dipol oder wie ein Kreisstrom?
2. Ist die Coulombsche Wechselwirkung imstande, bei sehr nahen Stößen den Effekt merklich zu stören?

§ 3. Diskussion nach der Quantentheorie

Es soll zunächst der Grundgedanke, der in §§ 4 und 5 durchgeführten Rechnung dargestellt und diskutiert werden. Das magnetische Moment des Ferromagnetikums ist nach der

Quantentheorie die Summe der Spinmomente μ_0 der in ihm enthaltenen Elektronen (von den nicht zum Magnetismus beitragenden inneren Elektronen der Eisenatome können wir bei der Rechnung absehen); μ_0 ist das Bohrsche Magneton

$$(10) \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Wir betrachten zunächst die Ablenkung des Höhenstrahlteilchens an einem einzelnen an ein Atom gebundenen Elektron von vorgegebener Spinrichtung. Die Gesamtablenkung ist die Summe der Einzelablenkungen. Wir werden ferner sehen, daß die Ablenkung davon unabhängig ist, ob die Elektronen gebunden oder frei (Leitungselektronen) sind.

Da der bei einem Stoß an ein Höhenstrahlungsteilchen übertragene Impuls q fast immer klein ist gegen seinen ursprünglichen Impuls p (die wenigen Teilchen, die eine große Einzelstreuung erleiden, werden außerdem bei der Messung der magnetischen Ablenkung nicht mitbeobachtet), können wir die Bahn des Teilchens als geradlinig und seine Geschwindigkeit als konstant annehmen. Die Ablenkung ergibt sich aus dem im ganzen bei einem Stoß übertragenen Impuls

$$(11) \quad q = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{R}(\tau) d\tau,$$

wobei nun $\mathfrak{R}(\tau)$ die Kraft bedeutet, die an dem Punkt der Bahn herrscht, an dem sich das Teilchen zur Zeit t befindet. Um klassisch den von einer Stromdichteverteilung $i(\tau)$ auf ein Teilchen der Geschwindigkeit v und der Ladung e übertragenen Impuls zu berechnen, kann in (11) statt $\mathfrak{R}(\tau)$ ein Ausdruck der Form grad V mit

$$(12) \quad V(\tau) = \frac{e}{c^2} \int \frac{(v, i(\tau))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

eingesetzt werden. Die von einem magnetischen Dipol des Momentes μ_0 verursachte Kraft soll nicht angeschrieben werden; sie wäre jedenfalls proportional $e\mu_0$.

Als quantentheoretisches Rechenverfahren, das diesem klassischen Bilde des Vorgangs genau analog ist, verwenden wir die von Gaunt¹⁾ und neuerdings von Bloch²⁾ zur Berechnung der Bremsung angewandte Methode, bei der die Be-

1) J. A. Gaunt, Proc. Cambr. Phil. Soc. 23. S. 732. 1927.

2) F. Bloch, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 285. 1933. Ich bin Herrn Dr. Bloch für die Möglichkeit, seine Arbeit im Manuskript kennenzulernen, und für mehrere lehrreiche Diskussionen sehr dankbar.

wegung eines Elektrons im Feld eines mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegenden Coulombschen Ladungszentrums untersucht wird. Nach dem Vorgang von Bloch entwickeln wir die Eigenfunktion des Elektrons nach Potenzen dieses Potentials [vgl. § 4, Gl. (26)]. Wir erhalten also auch für das wirksame Feld eine Entwicklung nach Potenzen dieses Potentials

$$(13) \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}'_2 + \dots;$$

nach Gl. (14) und (15) schreitet sie insbesondere nach ungeraden Potenzen von e fort, beginnend mit einem Glied, das e linear enthält. Da nun aus (10) und (12) folgt, daß sowohl \mathfrak{B} wie \mathfrak{S} ebenfalls den Faktor e linear enthalten, lassen sich die beiden am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochenen Fragen jetzt offenbar so formulieren:

1. Heißt das erste Glied von (13) \mathfrak{B} oder \mathfrak{S} ?
2. Sind die folgenden Glieder von ähnlicher Größenordnung wie das erste oder kleiner?

Für das Wechselwirkungspotential verwenden wir den — unter Vernachlässigung der Retardierung — leicht aus der Diracschen Wellengleichung ableitbaren Ausdruck

$$(14) \quad V(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{(\mathbf{v}, \vec{\alpha})}{c} \right),$$

der in seinen beiden Gliedern die Wirkung des skalaren und des Vektorpotentials zusammenfaßt (\mathbf{r} und \mathbf{r}' sind die Koordinaten der beiden Teilchen, $\vec{\alpha}$ ist der Vektor der Diracschen Strommatrizen). Die Vernachlässigung der Retardierung ist für unsere Rechnung unbedenklich, denn zur Beantwortung der ersten Frage brauchen wir nur die Wirkung der ungestörten Eigenfunktion des Elektrons, deren — statisches — Feld vom Phänomen der Retardierung gar nicht beeinflusst wird, und für die höheren Näherungen (zweite Frage) werden wir nur eine Größenordnungsabschätzung geben, deren Charakter durch Berücksichtigung der Retardierung nicht geändert würde.

Für die Eigenfunktion des Elektrons erhalten wir eine Entwicklung nach Potenzen des durch (14) gegebenen Potentials, deren erstes, von V unabhängiges Glied ψ_0 , die Eigenfunktion vor dem Stoß, ein gebundenes Elektron von vorgegebener Spinrichtung repräsentiert. Das am jeweiligen Ort des stoßenden Teilchens im Mittel herrschende Potential berechnen wir wieder nach (14) rückwärts aus der Eigenfunktion des Elektrons zur Zeit t :

$$(15) \quad \bar{V}(\mathbf{r}) = \int \psi^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

($d\mathbf{r}'$ = Volumenelement im Raum des Vektors \mathbf{r}').

Die erste Frage läßt sich nun leicht beantworten. Da in (15) bereits $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ den Faktor e^2 enthält, haben wir für ψ die ungestörte Eigenfunktion ψ_0 einzusetzen. D. h. zur Entscheidung zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} können wir von der Änderung der Eigenfunktion des Elektrons durch den Stoß ganz absehen, so wie es in Analogie zur klassischen Theorie zu vermuten war.

Dann folgt aus (14) und (15) aber

$$(16) \quad \bar{V}(\mathbf{r}) = e^2 \left\{ \int \frac{\psi_0^* \psi_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}, \int \frac{\psi_0^* \vec{\alpha} \psi_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \right\}.$$

Das erste Glied ist das Coulombpotential einer Ladungsdichte $e\psi_0^* \psi_0$, das zweite [das genau den Bau von (12) hat] das Potential einer Stromdichte $ec\psi_0^* \vec{\alpha} \psi_0$. Da der Spin des Zustandes ψ_0 gegeben ist, ist diese Stromdichte nach der Diracschen Theorie gerade die eines Kreisstromes vom magnetischen Moment μ_0 ; mit dem durch (16) gegebenen Potential kann man nun rein klassisch weiterrechnen und es folgt somit nach der Argumentation von § 2, daß das wirksame Feld \mathfrak{B} , die magnetische Induktion ist.

In der zweiten Frage, betreffend den Einfluß der höheren Näherungen bestätigt die Rechnung von § 5 das, was aus der genauen Entsprechung zwischen dem hier verwendeten Näherungsverfahren und der Bornschen Stoßmethode folgt. Diese läßt sich ja nach Møller¹⁾ und Distel²⁾ als Entwicklung nach Potenzen $\frac{e^2}{\hbar v}$ auffassen. Da die Höhenstrahlungsteilchen praktisch Lichtgeschwindigkeit haben, dürfen wir daher erwarten, daß die zweite Näherung etwa im Verhältnis $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ kleiner wird als die erste. Natürlich muß außerdem gezeigt werden, daß sie überhaupt konvergiert, d. h. daß nicht die Größe der Wechselwirkung beim Stoß das ganze Näherungsverfahren illusorisch macht. Anschaulich läßt sich das Auftreten des Faktors $\frac{e^2}{\hbar v}$ hier etwa so interpretieren: Als kleinster möglicher Radius des Kreisstromes, der dem Spin entspricht, ist in der Diracschen Theorie des Elektrons eine Länge der Größenordnung $\frac{\hbar}{mc}$ anzusehen [vgl. die „Zitterbewegung“ des Elektrons nach Schrödinger³⁾]. Damit das Elektron, wie in

1) Chr. Møller, Ztschr. f. Phys. 66. S. 513. 1930 (diese Arbeit wird im folgenden nicht mehr herangezogen).

2) F. Distel, Ztschr. f. Phys. 74. S. 785. 1932.

3) E. Schrödinger, Berl. Ber. 1930. S. 418.

§ 2 erläutert, durch sein Ausweichen ein sehr nahes Vorbeifliegen an dem Kreisstrom verhindern könnte, müßte es also bei einem Stoßabstand von $\frac{\hbar}{mc}$ bereits die Geschwindigkeit v des stoßenden Teilchens übernehmen. Die bei Stoßabständen von $\frac{\hbar}{mc}$ im Mittel übertragene Geschwindigkeit ist aber $\frac{e^2}{m}$; so lange also $\frac{e^2}{\hbar} \ll v$ ist, kann die Beschleunigung des Elektrons keine störende Rolle spielen.

Es sei betont, daß unser Resultat nicht etwa bedeutet, daß für die magnetische Ablenkung nur die *elastischen* Stöße einen merklichen Beitrag lieferten; gerade die kleinsten Stoßabstände, bei denen fast nur unelastische Stöße vorkommen, spielen ja eine entscheidende Rolle. Unser Resultat bedeutet vielmehr gerade, daß es (bis auf Glieder höherer Ordnung) ganz gleichgültig ist, ob ein Stoß elastisch oder unelastisch ist; daß die hier verwendete Methode auf verhältnismäßig kurzem Wege zum Ziel führt kommt gerade daher, daß sie die mittlere Impulsübertragung von der Frage der Änderung des Zustandes des Elektrons, die Sache einer höheren Näherung ist, zu trennen gestattet.

Wir haben noch zu zeigen, daß unser Resultat nicht davon abhängt, ob die Elektronen frei oder gebunden sind. Für nahe Stöße (Stoßzeit kurz gegen die reziproken Eigenfrequenzen des gebundenen Elektrons) ist das selbstverständlich. Aber auch für große Abstände macht die Bindung deshalb nichts aus, weil wir auch bei freien Elektronen nur nach der mittleren Impulsübertragung, d. h. der Bewegung des *Schwerpunktes* des Wellenpaketes relativ zum einfallenden Teilchen fragen; dieser läuft nach einem bekannten Satz von Ehrenfest auf der Bahn, die nach der klassischen Theorie von einem punktförmigen Teilchen, das denselben Kräften unterworfen ist, beschrieben würde. Allerdings ist der Ehrenfestsche Satz nur anwendbar, wenn das Wellenpaket sich nicht während der Stoßzeit über Gebiete ausdehnt, in denen das Potential merklich inhomogen wird; diese Bedingung bedeutet aber nur, daß die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons im Atom bzw. Wellenpaket klein sein muß gegen die Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens.

Strenggenommen ist noch eine Ergänzung der obigen Überlegungen notwendig. Während es nämlich physikalisch keinen Unterschied bedeuten sollte, ob man sich die freien Elektronen als durch das ganze Metall erstreckte ebene Wellen oder als Wellenpakete von Atomgröße vorstellt, kann die Schlußweise auf Grund des Ehrenfestschen Satzes natürlich nur auf den zweiten Fall angewandt werden.

Wir wählen zur Behandlung des ersten Falles ein Koordinatensystem, in dem das Höhenstrahlungsteilchen ruht und fragen nach der Ablenkung des Elektrons. Man sieht dann leicht ein, daß sich die mittlere Ablenkung eines mit vorgegebenem Stoßabstand vorbeifliegenden Wellenpakets von der einer (praktisch) unendlich ausgedehnten ebenen Welle ebenso unterscheiden muß wie in der klassischen Theorie die Ablenkung eines einzelnen Teilchens von gegebenem Stoßabstand von der mittleren Ablenkung eines sehr breiten Teilchenstromes; im quantentheoretischen Formalismus folgt dies aus der Interferenz der Streuwellen der zum Aufbau des Wellenpaketes superponierten einfallenden ebenen Elektronenwellen. Es läßt sich zeigen, daß der Mittelwert der Ablenkung von Wellenpaketen mit allen möglichen Stoßabständen gleich der mittleren Ablenkung einer ebenen Welle ist.

Denn sei

$$(17) \quad \psi(t) = \int f(t) e^{i t \tau} dt$$

eines der obigen Wellenpakete, so betrachten wir ein Gemenge ebener Wellen, in dem jede Wellenzahl t mit dem Gewicht $|f(t)|^2$ vertreten ist, das jedoch alle beliebigen Phasen enthält, d. h. wir mitteln über alle Phasen in derjenigen Überlagerung ebener Wellen, die bei der durch (17) gegebenen Phasenbeziehung gerade unser Wellenpaket ergibt. Da sich bei Superposition mit unbestimmter Phase nicht die Amplituden, sondern die Intensitäten addieren, sind wir sicher, daß durch die Phasenmittlung alle Interferenzeffekte wegfallen; das Gemenge liefert also sicher dieselbe Ablenkung wie eine einzelne der ihm angehörigen ebenen Wellen. Andererseits ist es aber natürlich einerlei, ob wir über alle Phasenbeziehungen der ebenen Wellen mitteln oder über alle aus ihnen superponierbaren Wellenpakete, deren jedes ja durch eine dieser Phasenbeziehungen charakterisiert ist. Darüber hinaus läßt sich noch zeigen, daß es — wie oben behauptet — genügt, über die Schwerpunktskoordinaten aller Wellenpakete derselben Form, d. h. über alle durch Translation aneinander hervorgehenden Wellenpakete zu mitteln: Ein aus (17) durch Verschiebung um τ_0 hervorgehendes Wellenpaket hat die Form

$$(18) \quad \psi(\tau) = \int f(t) e^{i t (\tau - \tau_0)} dt.$$

Wellenpakete anderer Form erhalten wir dagegen durch die Einführung einer wesentlich anderen Phasenbeziehung:

$$(19) \quad \psi(\tau) = \int f(t) e^{i [t (\tau - \tau_0) + g(t)]} dt.$$

Der Mittelwert irgendeines Operators O (etwa des übertragenen Impulses) über alle τ_0 ist

$$(20) \quad \begin{cases} \bar{O} = \int \psi^*(\tau) O \psi(\tau) d\tau_0 \\ = \int d\tau_0 \int dt \int d\tau f^*(t) e^{-i [t (\tau - \tau_0) + g(t)]} O f(t') e^{i [t' (\tau - \tau_0) + g(t')]}. \end{cases}$$

Die Integration über τ_0 ergibt

$$(21) \quad \int e^{i \tau_0 (t - t')} d\tau_0 = (2\pi)^{1/2} \delta(t - t');$$

wegen der δ -Funktion ist dann (20) nur an den Stellen $t = t'$, d. h.

$$(22) \quad g(t) - g(t') = 0$$

von Null verschieden. D. h. das Resultat ist von der Form des Faktors $e^{ig(t)}$ und somit von der Form des Wellenpaketes unabhängig.

Zu beachten ist noch, daß wir es wegen der endlichen Größe des Ferromagnetikums nicht mit unendlich ausgedehnten Wellen zu tun haben, so daß bei der Mittelung über die Schwerpunkte der Wellenpakete nicht bis ins Unendliche integriert werden darf. Dies läßt sich dadurch berücksichtigen, daß man zwar in (20) bis unendlich integriert, statt (18) aber schreibt

$$(23) \quad \psi(r) = \int f(t) e^{i t(r-r_0)} dt \chi(r_0),$$

wo $\chi(r_0)$ im Innern des Eisens eine Konstante ist und im Außenraum verschwindet. In (21) ergibt sich dann zwar nicht mehr die δ -Funktion, aber eine Funktion, deren Breite nicht größer ist als die Streuung der zum Aufbau von $\chi(r_0)$ nötigen Wellenzahlen.

Damit ist die allgemeine Gültigkeit unserer Resultate auch für freie Elektronen gezeigt. Wir haben damit ein sehr ähnliches Problem behandelt wie die von Mott¹⁾ berechnete Polarisation freier Elektronen durch Streuung an einem Coulombschen Ladungszentrum (abgesehen von einer Koordinatentransformation, durch die das bei Mott ruhende Ladungszentrum in unser bewegtes übergeht). Es ist ja eben die Asymmetrie in der Streuung *polarisierter* Elektronen, wie sie in dieser Arbeit berechnet wird, welche bewirkt, daß aus einem Bündel *unpolarisierter* Elektronen in einer vorgegebenen seitlichen Richtung mehr Elektronen einer bestimmten als der entgegengesetzten Polarisationsrichtung herausgestreut werden. Da es scheinen könnte, als seien unsere Resultate im Widerspruch mit denen von Mott, soll der Unterschied der beiden Rechnungen noch kurz klargelegt werden. In der Näherung, in der nur lineare Glieder in e^2 berücksichtigt werden, ergab sich nämlich oben als wirksames Feld \mathfrak{B} und somit eine beträchtliche mittlere Ablenkung, während Mott in dieser Näherung überhaupt keine Asymmetrie der Streuung erhält (vgl. II, S. 451).

Der Unterschied beruht darauf, daß Mott nicht die *mittlere* Impulsübertragung, sondern die Intensität der gestreuten Kugelwelle als Funktion des Streuwinkels θ , d. h. bis auf einen Faktor den Wirkungsquerschnitt $F(q)$ für jede Impulsübertragung q berechnet. Der im Mittel übertragene Impuls ist proportional

$$(24) \quad \bar{q} \sim \int F(q) q dq.$$

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A 124. S. 426. 1929 (I); 135. S. 429. 1932 (II).

Nun ist nach Mott zwar für alle *endlichen* q in der in $\frac{e^2}{\hbar v}$ linearen Näherung

$$(25) \quad F(q_{\parallel}, q_{\perp}) = F(q_{\parallel}, -q_{\perp});$$

daraus darf jedoch nicht geschlossen werden, daß die Integration in (24) Null ergebe, denn für $q = 0$ divergiert das Integral wegen des Rutherfordfaktors $\frac{1}{\sin^4 \theta}$, den F enthält. Physikalisch bedeutet das die aus der Theorie der Bremsung bekannte Tatsache (vgl. Teil II dieser Arbeit), daß diejenigen Elektronen, die in sehr großem Abstand vom Zentrum vorbeifliegen, wegen ihrer großen Anzahl trotz der kleinen Ablenkung jedes einzelnen von ihnen einen sehr großen Beitrag zur Impulsübertragung liefern, derart, daß das Resultat ganz von den Grenzen der Integration über den Stoßabstand bzw. den übertragenen Impuls abhängt. Dadurch wird der in (23) ausgedrückte Unterschied der Eigenfunktion eines im Innern des Ferromagnetikums freien Elektrons von der unendlichen ebenen Welle, mit der Mott rechnet, wesentlich: für Impulsübertragungen, die kleiner sind als der nach der Unbestimmtheitsrelation durch die endliche Größe des Ferromagnetikums bestimmte Impuls, gilt (25) nicht mehr, und diese genügen, um in (24) den richtigen Wert für \bar{q} zu liefern. Dieser Sachverhalt ist das genaue Abbild der Tatsache, daß klassisch die gesamte im Innern des Eisens herrschende magnetische Polarisierung als Wirkung eines auf seiner Oberfläche fließenden Kreisstromes aufgefaßt werden kann.

Aus demselben Grunde würde übrigens auch eine Rechnungsweise, die das *einfallende* Teilchen als unendlich ausgedehnte ebene Welle behandelt (z. B. die Bornsche Stoßmethode), die in dieser Arbeit gestellte Frage nicht beantworten. Betrachten wir nämlich statt des ruhenden Elektrons das einfallende Teilchen als polarisiert (was für die Ablenkung nichts ausmachen darf), so haben wir wieder ein dem Mottschen genau analoges Problem vor uns, bei dem von der Begrenzung der ebenen Welle nicht abgesehen werden darf; und die Rechnung nach der von Møller (a. a. O. I, II) angegebenen relativistischen Erweiterung der Bornschen Methode zeigt¹⁾ in der Tat, daß alle Wirkungsquerschnitte in q symmetrisch sind.

1) Herr Dr. M. Delbrück hat mich durch die Überlassung diesbezüglicher Resultate sehr zu Dank verpflichtet.

§ 4. Berechnung der mittleren Ablenkung in erster Näherung

Die in § 3 angedeutete Rechnung soll hier in ihren einzelnen Schritten verfolgt werden.

Für die Eigenfunktion eines Elektrons im zeitlich veränderlichen Potential $V(t)$ hat Bloch (a. a. O.) folgende Entwicklung angegeben:

$$(26) \quad \psi(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t e^{\frac{iHt'}{\hbar}} V(t') e^{-\frac{iHt'}{\hbar}} dt' + \dots \right] \psi_0,$$

wo ψ_0 die (zeitunabhängige) Eigenfunktion des Anfangszustandes ($t = -\infty$) bedeutet und H der Hamiltonoperator des ungestörten Systems ist. In diesem Paragraphen können wir uns auf das erste Glied in (26) beschränken; es ist

$$(27) \quad e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \psi_0 = \psi_0 e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} = \psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

d. h. genau die zeitabhängige ungestörte Eigenfunktion.

Das stoßende Teilchen falle aus der x -Richtung ein. Die Spinrichtung des Elektrons steht senkrecht dazu; wir wählen sie als z -Richtung und haben somit im Mittel nur eine Ablenkung in der y -Richtung zu erwarten. Bei dieser Wahl der Koordinaten wird $(\mathbf{v}, \vec{\alpha}) = v \alpha_z$, und der magnetische Teil von (16) erhält die Form

$$(28) \quad \bar{V}_{\text{magn.}} = -\frac{e^2 v}{c} \int \psi_0^*(\mathbf{r}') \frac{\alpha_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

ψ_0 ist eine vierkomponentige Diracsche Wellenfunktion; nach Darwin¹⁾ läßt sie sich näherungsweise schreiben

$$(29) \quad \psi_0^\lambda = \alpha^\lambda \varphi_0 \quad (\lambda = 1 \dots 4),$$

wobei φ_0 die Schrödingersche Eigenfunktion des Anfangszustandes ist, und die α^λ , wenn der Spin parallel zur z -Achse gerichtet ist, folgende vier Operatoren sind

$$(30) \quad \frac{i\hbar}{2mc} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad -\frac{i\hbar}{2mc} \frac{\partial}{\partial z}, \quad 0, \quad 1.$$

Mit diesen Eigenfunktionen und der bekannten vierreihigen Matrix α_z wird

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{grad } \bar{V}_{\text{magn.}} &= \frac{e^2 \hbar v}{2mc^2} \text{grad} \int \left[\left(\varphi_0^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y'} \varphi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\varphi_0^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial x'} \varphi_0 \right) \right] \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \right.$$

1) C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A 118. S. 654. 1928.

Hier ist das imaginäre Glied der Schrödingersche Strom, der verschwindet, wenn die Eigenfunktion reell ist; da wir wissen, daß der Ferromagnetismus vom Spin herrührt, können wir dieses Glied fortlassen. Das reelle Glied ist der für das magnetische Moment des Elektrons verantwortliche, von Gordon¹⁾ eingeführte „Polarisationsstrom“. Integrieren wir (31)

partiell und beachten, daß wegen der Symmetrie von $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ in \mathbf{r} und \mathbf{r}' die Differentiation dieses Ausdruckes nach y' durch die nach y ersetzt werden darf, so folgt

$$(32) \quad \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{magn.}}}{\partial y} = -\frac{ev}{c} \cdot \frac{e\hbar}{2mc} \int \varphi_0^* \varphi_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}'.$$

Wir wollen diesen Ausdruck für große und kleine Stoßabstände getrennt auswerten.

Für Abstände, die groß sind gegen die Größe des Atoms, besteht in der klassischen Theorie kein Unterschied zwischen der Wirkung eines Kreisstromes und der eines magnetischen Dipols; es läßt sich auch leicht zeigen, daß hier (32) genau das Kraftfeld eines Dipols vom magnetischen Moment $\frac{e\hbar}{2mc}$ darstellt. Wir entwickeln das Potential

$$(33) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \mathbf{r}')}{r^3} + \dots$$

Wir brauchen nur das erste Glied dieser Entwicklung (das zweite verschwindet überdies bei der Integration) und erhalten

$$(34) \quad \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{magn.}}}{\partial y} = -\frac{e}{c} v \frac{e\hbar}{2mc} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Die Kraft, die nach der klassischen Theorie ein Dipol vom magnetischen Moment μ ausüben würde, ist

$$(35) \quad \mathfrak{K}_y = \frac{e}{c} v \mathfrak{H}_z = \frac{e}{c} v \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$(36) \quad = -\frac{e}{c} v \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right),$$

letzteres wegen $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$. (36) unterscheidet sich von (34)

durch den Summanden $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right)$; dieser verschwindet aber, wenn man aus der Kraft durch Integration über die Zeit den übertragenen Impuls berechnet, aus Symmetriegründen. Physikalisch rührt der Unterschied von der Definition des Impulses

1) W. Gordon, Ztschr. f. Phys. 50. S. 630. 1928.

im Magnetfeld her: (36) liefert bei der Integration über die Zeit die Größe $m v'$ (v' = übertragene Geschwindigkeit), (34) dagegen den Impuls \mathfrak{A} (= Vektorpotential)

$$(37) \quad q = m v' + \frac{e}{c} \mathfrak{A}.$$

Für einen magnetischen Dipol ist nun

$$(38) \quad \mathfrak{A}_y = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right),$$

und da wegen der gleichförmigen Bewegung des streuenden Teilchens in der x -Richtung

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial t} = v \frac{\partial}{\partial x}$$

muß (34) nach (37) lauten

$$(40) \quad \dot{q} = m \dot{v}' + \frac{e}{c} v \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

im Einklang mit (36').

Für kleine r wird die Ausrechnung von (32) mühsam. Wir können sie jedoch durch eine Überlegung von der Art der zweiten Hälfte des § 3 vereinfachen. Wir wählen als Eigenfunktion φ_0 nicht die eines Atoms, sondern eine im ganzen Ferromagnetikum konstante, im Außenraum aber verschwindende Funktion, die wir so normieren, daß

$$(41) \quad \varphi_0^* \varphi_0 = \varrho$$

die richtige Dichte der ferromagnetischen Elektronen ist. Das Eisenstück denken wir uns, um den „Entmagnetisierungsfaktoren“ zu entgehen, in der z -Richtung (d. h. parallel zum Feld) unendlich lang; dann wird $\mathfrak{H} = 0$ und $\mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{M}$, und da $\mathfrak{M} = \varrho \mu_0$ ist, wird der auf der Wegstrecke l übertragene Impuls nach der klassischen Theorie

$$(42) \quad q = 4\pi \int_0^{l/v} \varrho \mu_0 \frac{e}{c} v dt = 4\pi \varrho \mu_0 \frac{e}{c} l.$$

Zur Auswertung von (32) dürfen wir nun annehmen, das stoßende Teilchen fliege genau in der x -Achse, derart, daß es für $t=0$ in $x=0$ ist, und erhalten für den mittleren übertragenen Impuls

$$(43) \quad \bar{q} = \frac{e}{c} v \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^l dx' \int_{-y_0}^{+y_0} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{e}{V(x'-vt)^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Die Integrationen über y' und z' ergeben

$$(44) \quad \bar{q} = \frac{e}{c} v \mu_0 \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^l dx \frac{4y_0}{(vt - x')^2 + y_0^2},$$

was durch die Substitution $vt - x' = \eta$ ausgewertet,

$$(45) \quad \bar{q} = 4 \frac{e}{c} \mu_0 l \operatorname{arctg} \frac{\eta}{y_0} \Big|_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} = 4\pi \varrho \mu_0 \frac{e}{c} l$$

gibt, im Einklang mit (42).

§ 5. Zweite Näherung

Die durch die höheren Näherungen in ψ veranlaßte Abweichung des wirksamen Feldes von B läßt sich nicht mit derselben Allgemeinheit wie die erste Näherung berechnen, da sie nicht mehr nur von den Quantenbedingungen, sondern von der speziellen Form der ungestörten Eigenfunktion des ruhenden Elektrons abhängt. Da wir die wahre Form der Eigenfunktionen der ferromagnetischen Elektronen nicht kennen, bietet es kein besonderes Interesse, die schon komplizierte zweite Näherung mit irgendwelchen willkürlich gewählten Eigenfunktionen exakt durchzurechnen. Daher sollen hier nur die beiden in § 3 angeführten Tatsachen gezeigt werden, daß die zweite Näherung für den übertragenen Impuls überhaupt konvergiert, und daß sie sich insbesondere im wesentlichen um einen Faktor $\frac{e^2}{\hbar v}$ von der ersten Näherung unterscheidet.

Wir nehmen das zweite Glied in der Entwicklung der Eigenfunktion mit und erhalten

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{V}(\mathbf{r}) &= \int (\psi_0^* + \psi_1^*) V(\mathbf{r}\mathbf{r}') (\psi_0 + \psi_1) d\mathbf{r}' \\ &= \bar{V}_0 + \int \psi_0^* V \psi_1 d\mathbf{r}' + \int \psi_1^* V \psi_0 d\mathbf{r}' + \bar{V}_2. \end{aligned} \right.$$

\bar{V}_0 ist das in § 4 berechnete mittlere Potential erster Näherung; uns interessieren die ausgeschriebenen Glieder; \bar{V}_2 , das zweimal den Faktor ψ_1 enthält, gehört bereits der nächsten Näherung an. ψ_1 ist durch den zweiten Summanden in (26) gegeben. Wenn wir die willkürliche additive Konstante in der Energie so wählen, daß $H\psi_0 = E_0\psi_0 = 0$ wird, können wir von dem hinter $V(\mathbf{r}')$ stehenden nur auf ψ_0 wirkenden Glied $e^{-\frac{iH\mathbf{r}'}{\hbar}}$ absehen und erhalten

$$(47) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{\text{magn.}}}{\partial y} &= -\frac{e^2}{c} \int d\mathbf{r}' \psi_0^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \alpha_x}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'|} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \sin \frac{H}{\hbar} (t - t') \frac{e^2 \left(1 - \frac{v}{c} \alpha_x \right)}{|\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'|} \psi_0. \end{aligned} \right.$$

Hier liefert die Multiplikation der beiden Klammern $\left(1 - \frac{v}{c} \alpha_x\right)$ wieder vier Glieder, von denen uns nur die beiden (gleichen) Glieder $\frac{v}{c} \alpha_x$ interessieren, da die anderen beiden die α -Matrix nicht mehr enthalten und daher nicht zur magnetischen Ablenkung beitragen. Wir nehmen nun ferner an, die Bahn des stoßenden Teilchens gehe durch das Atom hindurch (denn dort wird der Beitrag der höheren Näherungen, die ja von der Störung der Eigenfunktion durch den Stoß Rechenschaft geben, noch am größten). Dann dürfen wir (vgl. dazu Bloch, a.a.O., S. 295) das Potential als schnell veränderlich gegen die Eigenfunktion betrachten und somit $\alpha_x \psi_0$ durch den Differentialoperator $\sin \frac{H}{\hbar} (t - t')$ „durchziehen“. Nach § 4 ist $\psi_0^* \alpha_x \psi_0 = \frac{\hbar}{2mc} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_0^* \varphi_0)$, und daher wird schließlich:

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{\text{magn.}}}{\partial y} &= -\frac{e^2}{\hbar} \frac{ev}{c} \frac{e\hbar}{2mc} \int d\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_0^* \varphi_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'|} \right) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^t dt' \sin \frac{H}{\hbar} (t - t') \frac{1}{|\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \right.$$

Dies unterscheidet sich von (32) um den Faktor

$$(49) \quad F = \frac{e^2}{\hbar} \int_{-\infty}^t \sin \frac{H}{\hbar} (t - t') \frac{dt'}{\sqrt{(vt' - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.$$

Das Integral wird dimensionslos, wenn wir $vt' = u'$ als neue Variable einführen; setzen wir ferner, da es uns nur auf eine Größenordnungsabschätzung ankommt, $y = z = 0$, so erhalten wir

$$(50) \quad F = \frac{e^2}{\hbar v} \int_{-\infty}^u \sin \frac{H}{v\hbar} (u - u') \frac{du'}{\sqrt{(u' - x')^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Damit ist das Auftreten des Faktors $\frac{e^2}{\hbar v}$ gezeigt. Um die Konvergenz des danebenstehenden Integrals nachzuweisen, be-

dienen wir uns zweckmäßig der Fourierentwicklung des Coulombpotentials

$$(51) \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{e^{ikz}}{k^2} dk.$$

Von dem Operator H brauchen wir nämlich, da das Elektron während der Stoßzeit als frei betrachtet werden darf, nur das Glied $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ zu berücksichtigen und dieses liefert, auf (51) angewandt, einfach $\frac{\hbar^2}{2m} k^2$. Also ist

$$(52) \quad \left\{ F = \frac{e^2}{\hbar v} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^u du' \int \frac{d\mathbf{r}}{k^2} \sin \left[\frac{\hbar}{2mv} \mathbf{r}^2 (u - u') \right] \cdot e^{i[kx(x' - u') + \mathbf{r}_y y' + \mathbf{r}_z z']} \right\}$$

oder, nach Ausführung der Integration über die Winkel in \mathbf{r} und mit den Abkürzungen:

$$(53) \quad \alpha = \frac{\hbar}{2mv} (u - u')$$

und

$$(54) \quad \varrho = \sqrt{(u' - x')^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$(55) \quad F = \frac{e^2}{\hbar v} \sqrt{32} \pi \int_{-\infty}^u du' \int_0^\infty \frac{\sin \alpha k^2 \sin \varrho k}{\varrho k} dk.$$

Daß die Integration über u' an keiner im Endlichen gelegenen Stelle zu Singularitäten führt, ist leicht zu sehen; um die Konvergenz für $|u'| \rightarrow \infty$ einzusehen, benutzen wir die Umformung

$$(56) \quad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha k^2 \sin \varrho k}{\varrho k} dk = \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho d\varrho' \int_0^\infty \sin \alpha k^2 \cos \varrho' k dk.$$

In (56) läßt sich die Integration über k ausführen und liefert

$$(57) \quad F = \frac{e^2}{\hbar v} \pi \sqrt{2} \int_{-\infty}^u du' \frac{1}{\varrho \sqrt{\alpha}} \int_0^\varrho \left(\cos \frac{\varrho'^2}{4\alpha} - \sin \frac{\varrho'^2}{4\alpha} \right) d\varrho'.$$

Nun ist

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \int_0^\varrho \cos \sigma^2 d\sigma, \\ \eta &= \int_0^\varrho \sin \sigma^2 d\sigma \end{aligned} \right.$$

die Parameterdarstellung der aus der klassischen Beugungstheorie bekannten Cornuschen Spirale, und man zeigt leicht, daß $\xi - \eta$ für $\sigma \rightarrow \infty$ wie $1/\sigma$ gegen Null konvergiert. Demgemäß wird für große $\frac{e}{2\sqrt{\alpha}}$ (und daher, da dann α und ρ proportional u' werden, für große u') der Integrand der restierenden Integration über u' in (57) proportional

$$(59) \quad \frac{1}{e} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{e} \sim \frac{1}{(u')^{3/2}},$$

was bei der Integration einen endlichen Wert ergibt.

II. Bremsung durch die freien Metallelektronen

§ 1. Qualitative Überlegungen

Die klassische Theorie der Bremsung von Bohr¹⁾ macht, ebenso wie ihre quantentheoretischen Erweiterungen durch Bethe, Møller und Bloch²⁾, wesentlich von der Tatsache Gebrauch, daß die bremsenden Elektronen gebunden sind. Denn an jedes freie Elektron wird bei einem Stoß die Energie

$$(60) \quad \varepsilon = \frac{2 e^2 E^2}{m v^2 b^2}$$

übertragen (e und m = Ladung und Ruhmasse des Elektrons, E und v = Ladung und Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens, b = Stoßparameter); um die totale Bremsung zu erhalten, muß man (65) über alle b (d. h. über eine Fläche) integrieren, und dabei divergiert das Resultat für $b \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ logarithmisch. Da (65) nur gilt, solange ε klein gegen die anfängliche Energie des stoßenden Teilchens ist, läßt sich die Divergenz bei kleinen b durch genauere Verfolgung des Stoßvorganges beheben. Dagegen bleibt (65) für beliebig große Stoßabstände richtig; ein unendlich ausgedehntes Gas von freien Elektronen würde in der Tat unendlich stark bremsen, da die Abnahme der an die einzelnen Elektronen übertragenen Energie die Zunahme ihrer Anzahl mit dem Abstand nicht zu kompensieren vermag. Dagegen übernimmt ein gebundenes Elektron praktisch keine Energie mehr, wenn der Stoßabstand so groß ist, daß das Elektron während der Stoßzeit mehrere Umläufe in seiner Bahn ausführen kann; das bedeutet im

1) N. Bohr, *Phil. Mag.* 25. S. 10. 1913 (I); 30. S. 581. 1915 (II).

2) Zitate vgl. Teil I.

wesentlichen, daß man (65) nur bis zu einem endlichen b_{\max} zu integrieren hat. Für die Bremsung von Elektronen der kinetischen Anfangsenergie mc^2 in Wasserstoff ist beispielsweise $b_{\max} \approx \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \text{Wasserstoffradius} \approx 10^{-6} \text{ cm}$.

Nun wissen wir aber, daß die Leitungselektronen der Metalle bis auf ihre Bindung an das Innere des Metalls als Ganzes (Existenz einer Austrittsarbeit) mit großer Näherung als frei betrachtet werden dürfen; daher ist die erwähnte Art der Begrenzung der Integration über b für sie sicher unzulässig. Da die Erfahrung nicht den hieraus zunächst folgenden eklatanten Unterschied im Bremsvermögen zwischen Leitern und Nichtleitern zeigt (sogar ein Metallstück, an dem ein geladenes Teilchen in einigem Abstand vorbeifliegt, müßte es erheblich bremsen), muß eine andere Beschränkung der freien Beweglichkeit der Metallelektronen eintreten. Man überlegt sich leicht, daß hierfür nur die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Kristallgitter in Betracht kommt, die sich in der Endlichkeit der Leitfähigkeit äußert und anschaulich durch die Angabe einer mittleren freien Weglänge der Elektronen beschrieben werden kann. Wir werden eine Beschreibung dieser Wirkung nach der klassischen Theorie geben und sie dann quantentheoretisch rechtfertigen und erweitern.

Der Einfluß der Wechselwirkung mit dem Gitter wird merklich bei Stoßabständen b , die so groß sind, daß das bremsende Elektron während der Stoßzeit $(\sim \frac{b}{v})$ mit einiger Wahrscheinlichkeit einen oder mehrere Zusammenstöße mit dem Gitter hat. Man kann die mittlere Hemmung seiner Bewegung durch diese Zusammenstöße dadurch beschreiben, daß man in seine Bewegungsgleichung eine der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft einsetzt, deren Größe sich aus der mittleren freien Weglänge bestimmt. Die Berechnung der Energieübertragung an ein solches Elektron, daß eine gedämpfte Bewegung ausführt, verläuft dann genau analog der von Bohr (a. a. O., I) durchgeführten Berechnung der Energieübertragung an ein harmonisch gebundenes Elektron; sie ist in § 2 durchgeführt. Man kann dimensionsmäßig leicht einsehen, daß die Einführung eines solchen Dämpfungsgliedes das Unendlichwerden der totalen Energieübertragung gerade verhindert. Zwar wird auch ein sehr fernes Elektron durch die Wechselwirkung mit dem vorbeifliegenden Teilchen noch in Bewegung gesetzt; es wird Joulesche Wärme entwickelt. Aber bei einem freien Elektron ist die *Beschleunigung* der

Kraft proportional $\left(\dot{x} \sim K \sim \frac{1}{b^2}, \ddot{x} \sim \frac{1}{b}\right)$, so daß die übertragene Energie

$$(61) \quad \varepsilon = \int \mathfrak{R} d\tilde{s} = \int_0^{b/v} K \dot{x} dt \sim \int_0^{b/v} \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{b} dt \sim \frac{1}{b^3}$$

bei der Integration über b wegen des Faktors $b db$ logarithmisch divergiert; dagegen wird bei einem sehr fernen gedämpft bewegten Elektron die *Geschwindigkeit* der Kraft proportional $\left(\dot{x} = \frac{1}{b^2}\right)$, und die übertragene Energie

$$(62) \quad \varepsilon \sim \int_0^{b/v} \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{b^2} dt \sim \frac{1}{b^3}$$

hat im Nenner eine höhere Potenz von b und bleibt daher bei der Integration über b endlich.

Quantentheoretisch kann nach Kronig¹⁾ in der Dispersionstheorie der Einfluß der freien Weglänge ebenfalls durch Einführung eines Dämpfungsgliedes berücksichtigt werden. Ferner hat Bloch (a. a. O.) gezeigt, daß bei Verwendung des gleichen Kraftansatzes klassische und Quantentheorie in dem Gebiet, in dem die Bremsung als Dispersionsproblem behandelt werden darf, gleiche Resultate liefern müssen. Die rein klassische Behandlung unseres Problems ist also gerechtfertigt, wenn gezeigt ist, daß man bei allen Stoßabständen, bei denen der Einfluß der Dämpfung schon berücksichtigt werden muß, Dispersionstheorie treiben, d. h. die Ortsabhängigkeit der Kraft innerhalb des Gebietes, in dem die Eigenfunktion des Elektrons groß ist, vernachlässigen darf. Nun benutzt man zwar im allgemeinen als Eigenfunktionen der freien Metallelektronen ebene Wellen, die sich für jedes Elektron über das ganze Metall erstrecken und daher nirgends als rasch veränderlich gegen das Störungspotential angesehen werden dürfen. Jedoch ist es möglich, aus ihnen Wellenpakete zu bauen, die zwar groß gegen den Gitterabstand sind, aber klein gegen den größten Stoßabstand, für den das Elektron während der Stoßzeit noch als frei angesehen werden darf (er ist wegen des sofort zu besprechenden Restes der Bindung an die Atome ebenso wie bei Bloch ~ 137 Atomradien); und die Bremsung durch solche Wellenpakete muß (vgl. Teil I, § 3) gleich der durch die ursprüngliche Eigenfunktion bewirkten sein.

¹⁾ R. de L. Kronig, Proc. Roy. Soc. **124**. S. 409. 1929 (I); **133**. S. 255. 1931 (II). Die Dämpfung wird in (II) behandelt. Vgl. auch Y. Fujioka, Ztschr. f. Phys. **76**. S. 537. 1932.

Die Annahme, die Leitungselektronen seien, abgesehen von der Reibungskraft, vollkommen frei, ist ebenso wie die entgegengesetzte Annahme einer festen Bindung an die einzelnen Atome ein in den wirklichen Metallen nicht realisierter Grenzfall, und wir müssen daher noch den Übergang zwischen den beiden Fällen klarstellen. Dieser Übergang wird bekanntlich nach Bloch dadurch behandelt, daß anstatt der Eigenfunktionen freier Elektronen die mit einer Funktion $u(\mathbf{r})$ von der Periodizität des Kristallgitters modulierten ebenen Wellen verwendet werden, welche die Lösung der Schrödingergleichung im periodischen Kraftfeld des Gitters darstellen:

$$(63) \quad \psi = e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} u(\mathbf{r}).$$

Das zu diesen Eigenfunktionen gehörende Energiespektrum besteht aus getrennten kontinuierlichen Bändern, deren jedes sich im Grenzfall völlig fester Bindung zu einem Energieniveau des einzelnen Atoms zusammenzieht, während sie sich für ganz freie Elektronen zu einem einzigen ungeteilten Kontinuum von Niveaus vereinigen. Zwischen diesen Niveaus sind zwei Arten von Übergängen möglich: erstens Übergänge in einen unendlich benachbarten Zustand, der Beschleunigung oder Verzögerung des Elektrons durch ein äußeres Feld entsprechend, zweitens Übergänge in einen Zustand eines anderen Bandes, entsprechend der Anregung des isolierten Atoms. Diesen Übergängen kann man nach Kronig (a. a. O., I) Oszillatorstärken zuordnen und damit in der üblichen Weise Dispersionstheorie treiben; dabei hängt die Oszillatorstärke f_0 des Übergangs in den unendlich benachbarten Zustand durch die Gleichung

$$(64) \quad f_0 = \frac{m}{m'}$$

mit der durch das Potentialgitter scheinbar vergrößerten Masse m' der Leitungselektronen zusammen, und ist somit ein Maß für die Freiheit von der Atombindung. Da wir die Bremsung nach der Dispersionstheorie behandeln dürfen, haben wir auch die in § 2 berechnete Energieübertragung an gedämpft bewegte freie Elektronen mit dem Gewicht f_0 in die gesamte Energieübertragung einzusetzen.

§ 2. Durchrechnung

Die Bewegungsgleichung des gedämpft bewegten Elektrons lautet

$$(65) \quad m(\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{R}(t).$$

Die Dämpfungskonstante ist mit der Leitfähigkeit σ des betrachteten Metalls nach Kronig durch die Gleichung

$$(66) \quad \gamma \sigma = \frac{e^2 Z}{2 \pi m a^3}$$

verbunden (Z = Zahl der Elektronen im Volumen a^3 der Elementarzelle des Kristalls). \mathfrak{R} ist die Coulombsche Kraft; ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Bahnrichtung lauten

$$(67) \quad \mathfrak{R}_{\parallel} = \frac{e E v t}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}; \quad \mathfrak{R}_{\perp} = \frac{e E b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}.$$

(65) hat unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$(68) \quad \dot{\mathbf{r}}_{t=-\infty} = 0$$

die Lösung

$$(69) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^t e^{\gamma t'} \mathfrak{R}(t') dt'.$$

Wir suchen nun die während des ganzen Stoßprozesses an das Elektron übertragene Energie

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_b &= \int (\mathfrak{R}, d\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{R}, \dot{\mathbf{r}}) dt \\ &= \frac{1}{m} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t} \mathfrak{R}_{\parallel}(t) \int_{-\infty}^t e^{\gamma t'} \mathfrak{R}_{\parallel}(t') dt' \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t} \mathfrak{R}_{\perp}(t) \int_{-\infty}^t e^{\gamma t'} \mathfrak{R}_{\perp}(t') dt' \right]. \end{aligned} \right.$$

Die gesamte Energie, die das Teilchen auf einer Wegstrecke Δz an die bremsenden Elektronen abgibt, erhalten wir aus (75) durch Integration über b :

$$(71) \quad \varepsilon = 2 \pi N \Delta z \int \varepsilon_b b db,$$

(N = Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit). Die Integration darf, genau wie im Fall freier Elektronen, nicht bis $b = 0$ erstreckt werden. Da für sehr kleine b der Einfluß der Dämpfung verschwindet, verläuft die Diskussion dieses Grenzfalles aber genau wie bei Bohr bzw. Bloch, und wir können sie uns ersparen, indem wir die untere Grenze b_0 so wählen, daß für sie das Elektron schon als frei betrachtet werden darf,

und dort unsere Lösung an die von Bloch für freie Elektronen gegebene anschließen. Wir erhalten dadurch die Bedingung

$$(72) \quad b_0 \ll \frac{v}{\gamma}.$$

Aus (70) und (71) folgt durch die Substitutionen

$$(73) \quad \frac{vt}{b} = x; \quad \frac{b\gamma}{v} = \alpha$$

und durch Benutzung der aus (73) folgenden Beziehung $\frac{db}{b} = \frac{d\alpha}{\alpha}$ die Gleichung

$$(74) \quad \varepsilon = \frac{2\pi e^2 E^2}{m v^3} N A_z (J_1 + J_2)$$

mit

$$(75) \quad J_1 = \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\alpha x'} dx'}{(1+x'^2)^{3/2}}$$

und

$$(76) \quad J_2 = \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} x dx}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\alpha x'} x' dx'}{(1+x'^2)^{3/2}}.$$

Zur Auswertung dieser Integrale führen wir zunächst in beiden eine partielle Integration über x' aus und erhalten

$$(77) \quad J_1 = - \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\alpha x'} x' dx'}{(1+x'^2)^{3/2}},$$

$$(78) \quad J_2 = \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} x dx}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\alpha x'} dx'}{(1+x'^2)^{3/2}}.$$

Nun addieren wir die beiden Ausdrücke und führen die neue Variable

$$(79) \quad y = x - x'$$

ein; es ergibt sich

$$(80) \quad J_1 + J_2 = \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y} y dy}{\sqrt{1+(x-y)^2}},$$

und nach Ausführung der Integration über α

$$(81) \quad J_1 + J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 y} dy}{\sqrt{1+(x-y)^2}}.$$

Da nun α_0 beliebig klein gewählt werden darf, ist es möglich, das Gebiet der Integration über y so in zwei Teile zu zerlegen, daß für die Grenze η zwischen den beiden Intervallen gilt

$$(82) \quad 1 \ll \eta \ll \frac{1}{\alpha_0}.$$

Nun darf im ersten Intervall ($y < \eta$) $e^{-\alpha_0 y}$ als konstant angesehen werden; im zweiten Intervall ($y > \eta$) kann man die Wurzel im Nenner durch $(y-x)$ oder, da wegen des Faktors $\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$ nur kleine Werte von x erheblich zum Gesamtintegral beitragen, durch y ersetzen. Das erste Intervall ergibt dann

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{1+(x-y)^2}} &= \log(\eta - x + \sqrt{1+(\eta-x)^2}) \\ &\quad - \log(-x + \sqrt{1+x^2}), \end{aligned} \right.$$

das zweite Intervall nach der bekannten Entwicklung des Integrallogarithmus

$$(84) \quad \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 y} dy}{y} = -\log \alpha_0 - \log \eta - c + \dots$$

(c = Eulersche Konstante = 0,577). Von den beiden Gliedern in (83) liefert das zweite bei der Integration über x aus Symmetriegründen Null; das erste ist, da η groß gegen 1 ist, $\log 2\eta = \log 2 + \log \eta$, wovon der $\log \eta$ gegen das entsprechende Glied von (84) wegfällt. Damit ergibt sich schließlich nach Ausführung der Integration über x

$$(85) \quad J_1 + J_2 = 2(\log 2 - \log \alpha_0 - c).$$

Demnach ist die durch Stöße von größerem Stoßabstand als b_0 übertragene Gesamtenergie

$$(86) \quad \epsilon_b > b_0 = \frac{4\pi e^2 E^2}{m v^2} N \Delta z \log \frac{2e^{-c} v}{b_0 \gamma}.$$

Dieser Ausdruck hängt noch von b_0 ab. Wir müssen also die gesamte Bremsung durch alle Elektronen, die einen geringeren Stoßabstand als b_0 haben und daher als frei betrachtet werden dürfen, noch zu (86) addieren, und müssen dann ein von b_0 unabhängiges Resultat erwarten. Wir nehmen an, die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Betheschen Rechnungsweise seien gegeben (vgl. darüber Bloch a. a. O.).

Dann erhalten wir die Bremsung bei kleinen Abständen am bequemsten, indem wir von der Betheschen Formel für die gesamte an harmonische Oszillatoren übertragene Energie die bei Abständen $b > b_0$ an diese übertragene Energie (die klassisch berechnet werden darf) abziehen. Es ergibt sich

$$(87) \quad \epsilon_b < b_0 \frac{4\pi e^3 E^2}{m v^3} N \Delta z \log \frac{b_0 m v}{e^{-c} h}$$

und somit für die totale übertragene Energie

$$(88) \quad \epsilon = \frac{4\pi e^3 E^2}{m v^3} N \Delta z \log \frac{2 m v^2}{h \gamma}.$$

Unsere Formel geht aus der Betheschen also einfach dadurch hervor, daß die Oszillatorfrequenz ν durch die reziproke Zeit γ ersetzt wird, welche die Schnelligkeit des Abklingens der Bewegung des Elektrons infolge der Dämpfung mißt. Da die mittlere Geschwindigkeit der Metallelektronen von derselben Größenordnung ist wie die mittlere Geschwindigkeit eines in einem Atom gebundenen äußeren Elektrons, bedeutet das, daß sich das Argument des Logarithmus um das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Metallelektronen zum Atomradius, d. h. etwa um einen Faktor 100 vergrößert. Nach den Überlegungen von § 1 ist nun (88), mit dem Faktor f_0 (Oszillatorstärke des Übergangs in den unendlich benachbarten Zustand) versehen, als Summand in die übliche Bremsformel einzusetzen. Nun sind die f_0 im allgemeinen nicht bekannt, man erhält aber eine brauchbare Annäherung, wenn man für alle Elektronen abgeschlossener Schalen $f_0 = 0$, für die äußeren Elektronen $f_0 = 1$ setzt. Die Abweichungen von den üblichen Formeln werden daher für die Metalle am größten werden, bei denen das Verhältnis der Anzahl der äußeren Elektronen zu der der inneren am größten ist, also für die leichten Metalle. Die numerische Rechnung ergibt in dieser Näherung für Lithium eine Vergrößerung der Bremsung um 30%, für Natrium dagegen nur noch eine Vergrößerung um 11% gegenüber den von Bloch¹⁾ berechneten Werten. Experimentell dürfte der Effekt also nur bei den leichtesten Metallen nachweisbar sein.

Zusammenfassung

Teil I der Arbeit behandelt die Frage, ob die Größe der magnetischen Ablenkung geladener Teilchen, die durch ein Ferromagnetikum fliegen, durch die magnetische Induktion \mathfrak{B}

1) F. Bloch, Ztschr. f. Phys. 91. S. 363. 1933.

oder das magnetische Feld \mathfrak{H} im Innern des Ferromagnetikums bestimmt wird. Nach der klassischen Theorie ergibt sich aus einem Modell, das die atomaren Elementarmagnete als Kreisströme auffaßt, \mathfrak{B} , aus einem rein magnetischen Modell \mathfrak{H} (§ 2). Quantentheoretisch folgt die Ablenkung des Teilchens aus seiner Wechselwirkung mit dem Kreisstrom, der nach der Diracschen Theorie des Elektrons dem Spinmoment der ruhenden Elektronen des Ferromagnetikums zugeordnet ist. Daher ergibt sich in erster Näherung als wirksames Feld \mathfrak{B} (§§ 3—4), und es zeigt sich, daß die höheren Näherungen um den Faktor $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ kleiner als die erste sind (§ 5). Die Bedeutung dieses Resultates für die Energiebestimmung der Höhenstrahlung wird diskutiert (§ 1).

In Teil II werden die Abweichungen von den üblichen Bremsformeln für rasch bewegte Teilchen untersucht, die bei der Bremsung durch Metalle auftreten müssen, da es dort nicht erlaubt ist, die bremsenden Elektronen als fest an Atome gebunden zu betrachten. Dabei muß die Beschränkung ihrer Bewegungsfreiheit infolge des endlichen elektrischen Widerstandes der Metalle berücksichtigt werden. Es ergibt sich eine bei den leichtesten Metallen 30% erreichende Vergrößerung der Bremsung gegenüber der bisherigen Formel.

Herrn Professor Heisenberg möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre stete Förderung herzlich danken.

Leipzig, Theoretisch-physikalisches Institut der Universität, 31. Mai 1933.

(Eingegangen 2. Juni 1933)

Über flüssige Metalleinkristalle. I

Von E. Donat und O. Stierstadt

(Mit 7 Figuren)

Inhalt: Es wird der Zustand geschmolzener Bi-Einkristalle unmittelbar über dem Schmelzpunkt im Hinblick auf eine kristalline Struktur der Schmelze untersucht. Eine solche kommt in elektrischen Leitfähigkeitsmessungen direkt nicht zum Ausdruck. Das Kristallisationsverhalten hingegen weist darauf hin, daß der Schmelze selbst eine kristalline Struktur und eine bestimmte kristallographische Orientierung zuzusprechen sind, und zwar diejenige der festen Phase, aus der sie entsteht. — Im Anschluß an die Überlegungen ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Anisotropie physikalischer Eigenschaften irregulärer Kristalle, dessen Ergebnisse mit der Erfahrung vorzüglich übereinstimmen.

I. Einleitung

In einer Flüssigkeit ist im Gegensatz zum Kristall eine feste Raumlage von Atomen oder Molekülen zueinander im allgemeinen nicht gegeben, so daß die einzelnen Atome ungeordnet gegeneinander liegen und sich durcheinander bewegen können. Man hat jedoch Stoffe gefunden, bei denen auch im flüssigen Zustand ein gewisser Zustand der Ordnung vorhanden ist. Und zwar sind dies vorwiegend organische Substanzen (z. B. Azoxyanisol oder Azoxyphenetol), welche auf Grund der chemischen Konstitutionsforschung in der Lage sind, geradlinige, langgestreckte Moleküle bzw. Molekülketten zu bilden. An flüssigen Metallen ist ein solches Verhalten zunächst nicht festgestellt worden.

Indessen machte im Jahre 1927 Boydston¹⁾ die Beobachtung gewisser Unregelmäßigkeiten in der Kurve der Temperaturabhängigkeit der Thermokraft von Bi-Einkristallen gegen Konstanten bei Temperaturen dicht oberhalb des Bi-Schmelzpunktes. Als Erklärung gibt er an: „Es scheint tatsächlich so, als ob auch im geschmolzenen Metall noch irgendwie eine kristalline Anordnung bestünde“.

1) R. W. Boydston, Phys. Rev. 30. S. 911. 1927.

Goetz¹⁾ macht später Gebrauch von einer ähnlichen Erklärung zur Deutung von Erscheinungen, die er beim Studium des Wachstums von Wismuteinkristallen fand. Wenn er einen geschmolzenen Bi-Stab mit einem Impfkristall impfte, welcher eine Zwillingslamelle enthielt, so beobachtete er, daß der impfte Kristall ebenfalls in Zwillingsorientierung wuchs, es sei denn, daß man die Region der Zwillingslamelle vorher auf eine Temperatur gebracht hatte, welche *erheblich* über der des Schmelzpunktes lag. Er fand auch, daß ein vielkristalliner Stab, nur wenig über den Schmelzpunkt erhitzt, nach dem Erstarren die gleiche Kornstruktur zeigte, wie vor dem Schmelzen.

Schließlich hat Soroos²⁾ die Untersuchungen von Boydston noch einmal aufgegriffen. Er fand einwandfrei, daß oberhalb des Bi-Schmelzpunktes die Thermokraft in eine Übergangsregion eintritt, in welcher sie von dem für den festen Kristall zu dem für den flüssigen Zustand charakteristischen Verhalten übergeht. Als Erklärung vermutet auch er das Bestehen einer bestimmten Kristallstruktur in dieser flüssigen Übergangszone.

Ausgehend von diesen Untersuchungen, die den in Frage stehenden Effekt immer nur als Nebenerscheinung behandeln, haben die Verfasser es nun unternommen, die Schmelzregion des Wismuteinkristalls mit Rücksicht auf eine einkristalline Struktur genauer zu untersuchen, und zwar an Einkristallen verschiedener Orientierung.³⁾

II. Untersuchungsmethode und Apparat

Die Untersuchung ging so vor sich, daß ein Bi-Kristallstab über seinen Schmelzpunkt erhitzt und dann wieder abgekühlt wurde. Während dieses Prozesses, der wiederholt und für schrittweise zunehmende Maximaltemperaturen durchlaufen wurde, wurden

1) A. Goetz, *Phys. Rev.* **35**. S. 193. 1930.

2) A. Soroos, *Phys. Rev.* **41**. S. 516. 1932.

3) Während unserer Untersuchung erschien eine Arbeit von F. Sauerwald u. W. Teske, *Ztschr. f. anorg. u. allgem. Chem.* **210**. S. 247. 1933, in welcher die Verfasser an Hand von Röntgenogrammen bestätigen, daß bei reinen Metallen über dem Schmelzpunkt in *kleinen Bereichen* Atomanordnungen vorhanden sind, die der Struktur des festen Zustandes entsprechen. (Bi wurde leider nicht untersucht.) Es sei hier auch erinnert an die Arbeiten von P. Debye und seinen Schülern, welche eine quasikristalline Struktur von Flüssigkeiten auf Grund der Wahrscheinlichkeit definieren, mit der bestimmte Atomabstände in der Flüssigkeit vorkommen. Auf die Besprechung der Röntgenuntersuchungen zu unserem Problem soll aber nicht an dieser Stelle, sondern erst im II. Teil der Arbeit näher eingegangen werden.

1. die elektrische Leitfähigkeit des Kristalls verfolgt und
2. seine Kristallorientierung vor dem Schmelzen und nach dem Wiedererstarren verglichen. Eine direkte röntgenographische Untersuchung über den Schmelzvorgang hin wurde in diesem 1. Teil der Arbeit noch nicht vorgenommen; sie wird z. Z. im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover ausgeführt.

Über den ersten Teil der Apparatur, die Anordnung zur Herstellung der Bi-Einkristalle, sind an dieser Stelle nur wenige Bemerkungen zu machen, da sie sich in wesentlichen Punkten an die Methode von Goetz¹⁾ anschloß. Hier sollen lediglich die Punkte erwähnt werden, in denen sich unsere Methode prinzipiell von der Goetzschen unterscheidet, und die Vereinfachungen, die sich nach unseren Erfahrungen an dem Prozeß der Züchtung und insbesondere der Impfung von Kristallen anbringen lassen.

Ein wesentliches Prinzip der Goetzschen Methode, die Kristallstäbe in horizontaler Lage wachsen zu lassen, um mechanische Beanspruchung jeder Art in der Kristallisationszone zu vermeiden, wurde beibehalten. Die Wismutstäbe wurden dann bei Goetz auf geeignetem Kristallträger durch einen feststehenden elektrischen Ofen gezogen; und zwar wurde, um die Erschütterungen des Antriebsmotors auf den Kristall nach Möglichkeit auszuschalten, zwischen Motor und Kristallträger ein Stück Gummischlauch als Antriebsachse eingelegt. Da nun, wie sich immer wieder bei der Kristallzüchtung zeigt, die geringsten mechanischen Erschütterungen während des Wachstums der Kristalle sich störend auf die Güte der Kristallausbildung auswirken, trafen wir die Anordnung folgendermaßen:

Der Kristall bleibt bei allen Untersuchungen, *auch bei seiner Züchtung*, in vollkommener Ruhe. Er ist zu diesem Zweck — mittels geeigneter Träger — auf einer schweren, gußeisernen Grundplatte *P* gelagert (Fig. 1). Der Rohrofen *O* bewegt sich, an einer Präzisionspindel *S* geführt, bei der Züchtung in Längsrichtung über den Kristall fort. Die Spindel wird dazu von einem Synchronmotor langsam gedreht. Der Kristall selbst ist somit bei allen Prozessen völlig unbewegt. Diese weitgehende Erschütterungsfreiheit ist deshalb notwendig, weil ein atomar geordneter, kristallartiger Zustand der Schmelze sofort zusammenbricht, und dem gewöhnlichen, ungeordneten Flüssigkeitszustande Platz macht, sowie kleinste Erschütterungswellen die Schmelze treffen.

1) A. Goetz, Phys. Rev. **35**. S. 193. 1930.

Alle weiteren Einzelheiten sind in der Figur ohne weiteres zu erkennen. Der Kristall in seinem Schmelzbett (beide durch den Ofen *O* verdeckt) befindet sich in einem Glasrohr *G*, so daß er ständig in einer Wasserstoffatmosphäre gehalten werden kann (H_2 bei 1 zugeführt und bei 2 verbrannt; Druck: einige Zentimeter Wassersäule). Als Material für das Schmelzbett

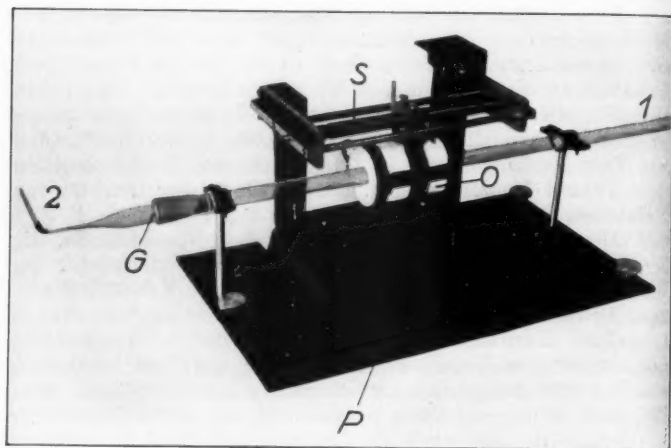


Fig. 1. Kristallzüchtmaschine

bewährte sich gewöhnlicher deutscher Dachschiefer besonders gut.¹⁾ Vor Gebrauch wurde die Schieferrinne ausgeheizt (getrocknet) und dann das Schmelzbett hauchdünn mit Wachs bestrichen.

Der Vorbereitungsprozeß (1. und 2. Generation) bis zur endgültigen Impfung des Kristalls verlief dann nach schon früher beschriebenem Verfahren (a. a. O.). Die Impfung selbst dagegen geschah in einer wesentlich einfacheren Weise als bisher. Während bei Goetz das eine Ende des zu impfenden Kristalls erst aufgeschmolzen, danach der Impfkristall bis zur Berührung herangeschoben und nach dem Zusammenfließen beider Teile dann wieder etwas zurückgezogen wurde, so daß

1) Eine Ansicht dieser Schmelzrinnen und der darin befindlichen Kristalle verschiedener Orientierungen vgl. bei O. Stierstadt, *Ztschr. f. Phys.* 80. S. 641. 1933. Fig. 4.

an der Stoßstelle eine Querschnittsverminderung eintrat (a. a. O. S. 201, Fig. 8), verlief in unserem Fall der ganze Impfprozeß gewissermaßen automatisch, ohne die geringste Bewegung irgendeines der daran beteiligten Kristallstücke.

Es hatte sich nämlich in den Untersuchungen von Goetz gezeigt (a. a. O., S. 202), daß, wenn der Kristall von jener verengten Stoßstelle aus entstand, er „fast immer“ in einer Zwillingsorientierung zum Impfkristall wuchs und nicht in der gewünschten Orientierung. Die Impfstelle war eben eine nicht zu umgehende Störstelle.

Um diese Störung auf das Kristallwachstum während des Impfprozesses möglichst weitgehend zu unterdrücken, gingen wir folgendermaßen vor:

An dem Impfkristall wird, unmittelbar vor der Benutzung, eine frische Spaltfläche angeschlagen. Dann wird der zu impfende Kristall (2. Generation) durch Befeuern der Spaltfläche des Impfkristalls sehr sauber angepaßt und beide Teile — in der Schmelzrinne eng aneinander liegend — so weit in den Ofen geschoben, daß ein Stückchen des Impfkristalls an der Stoßstelle noch mit aufgeschmolzen wird. Dabei verschmelzen beide Stücke ohne weiteres miteinander, sofern man *nicht*, in dem hier unangebrachten Bestreben, möglichst sauber zu arbeiten, die beiden Stoßflächen nach der Herstellung noch einmal abgeätzt hat. Es sollen vielmehr die *frischen* Spalt- bzw. Schnittflächen aneinander liegen. Läßt man jetzt, nachdem sich Temperaturgleichgewicht eingestellt hat, vom Impfkristall aus wachsen, so erhält man ohne Schwierigkeiten jede gewünschte Orientierung. Bei diesem Vorgang wird also nach der Einbringung in den Ofen nicht mehr die geringste Verschiebung zwischen Impfkristall und zu impfendem Kristall vorgenommen, sondern der ganze Impfprozeß verläuft von selbst. Das scheint für ein gutes Wachstum der Kristalle sehr wesentlich zu sein, weil so jede Störung an der geschmolzenen Impfzone in Fortfall kommt.

Die Messung der elektrischen Leitfähigkeit geschah mit einem 5stufigen Kompensationsapparat. Die Leitfähigkeit sollte über den Schmelzprozeß bis in den flüssigen Zustand hinein verfolgt werden. Dazu wurde folgende Anordnung getroffen:

Da der Kristall flüssig wurde, mußte er natürlich, um seine Form nicht zu verlieren, während des ganzen Vorganges in seinem Schmelzbett bleiben. Fig. 2 zeigt Längs- und Querschnitt dieses Schmelzbettes *B* mit dem darin befindlichen Kristall *K*. Die Zuführung der elektrischen Kreise zum Kristall geschah mit Hilfe der Kupfersonden *S*. Zur Anbringung dieser

Sonden war die Schmelzrinne an vier, in der Figur angegebenen, Stellen durchbohrt worden. Die Spitzen der Sonden, welche reichlich bis zur Mitte des Kristalls senkrecht in diesen hineinragen müssen, sind vor dem Einschmelzen mit einem Tropfen Säure sorgfältig zu reinigen. Dann wird der Kristall in das Bett der Schmelzrinne seitlich neben die Sonden gelegt

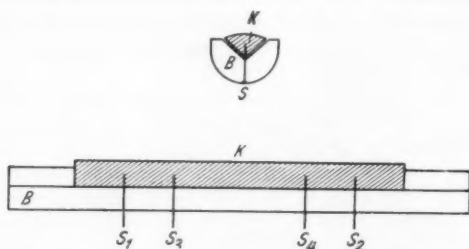


Fig. 2. Kristallträger, Längs- und Querschnitt

und der Ofen von dem einen Kristallende aus darüber hinweggeführt. Zweckmäßig läßt man an diesem Ende ein Stück von etwa 1 cm unaufgeschmolzen, da dieses dann gleichzeitig wieder als Impfkristall dient und man sich so später einen nochmaligen Impfprozeß ersparen kann.

Fig. 3 zeigt die Ansicht einer in dieser Weise eingeschmolzenen Sonde. Der vordere Teil der Figur stellt einen

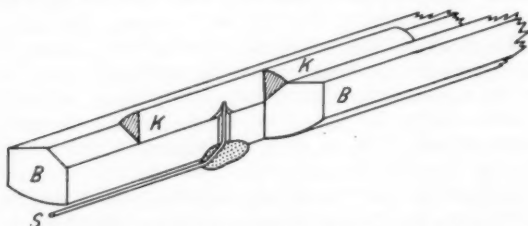


Fig. 3. Einschmelzstelle einer Sonde im Kristall

vertikalen Längsschnitt durch Kristall K, Schmelzbett B und eine Sonde S dar. Die Stirnkanten der beiden Hälften des Kristalls sind schraffiert gezeichnet. Die punktierte Masse an der Einführungsstelle der Sonde ist eine Mischung von Talkum und Wasserglas, mit der die Sonden am Schmelzbett B befestigt wurden. Zwischen den Sonden S_1 und S_2 (Fig. 2)

wurde der Meßstrom zugeführt, zwischen S_3 und S_4 wurde die Potentialdifferenz kompensiert.

Alle Untersuchungen wurden an 2 Kristalltypen durchgeführt, in welchen die Orientierung der Kristallachsen charakteristische Grenzlagen besaß. Beim ersten Typus stand die kristallographische Hauptachse (111) senkrecht zur Längsachse des Kristallstabes (P_1 - und P_2 -Kristalle), beim zweiten Typus lag sie parallel zur Stabachse (P_3 -Kristalle).¹⁾

III. Ergebnisse

1. Leitfähigkeitsmessungen²⁾

Es galt hier zunächst rein qualitativ festzustellen, ob der Widerstand der Bi-Einkristalle in der Nähe des Schmelzpunktes, aber schon oberhalb desselben, eine Anomalie auf-

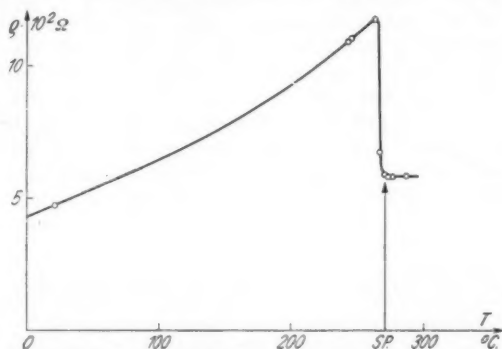


Fig. 4. Widerstand als Funktion der Temperatur eines Bi- P_1 -Kristalls (Strom \perp Hauptachse)

weist. Fig. 4, welche die Widerstandstemperaturkurve für einen P_1 -Kristall darstellt, zeigt, daß eine solche Anomalie, zum mindesten bis zu Temperaturen von 20°C oberhalb des Schmelzpunktes, nicht auftritt. Bei noch höheren Temperaturen nach einer Unstetigkeitsstelle zu suchen, hat mit Rücksicht

1) Vgl. O. Stierstadt, Ztschr. f. Phys. 80. S. 641. 1933. Fig. 4.

2) Die ersten orientierenden Messungen dieser Art wurden bereits vor einem Jahr von dem einen von uns (Stierstadt) gemeinsam mit Herrn Dr. A. B. Focke im California Institute of Technology in Pasadena bei Prof. Dr. R. A. Millikan begonnen; jedoch konnte die Arbeit dort nicht zu Ende geführt werden. Herrn Focke sind wir auch für die Überlassung von Impfkristallen der beiden wichtigsten Orientierungen zu größtem Dank verpflichtet.

auf unser Problem kein Interesse. Denn nach Ausweis aller bisherigen Erfahrungen (vgl. u.) hält sich ein kristallartiger Zustand der Schmelze beim Bi bis zu höchstens 10°C über dem Schmelzpunkt, und auch das nur dann, wenn man mit allen Cautelen bzgl. Erschütterungsfreiheit, Sauberkeit der Kristalloberfläche beim Schmelzen durch eine reduzierende H_2 -Atmosphäre usw. vorgeht. Unser Diagramm zeigt, daß lediglich vor dem Schmelzpunkt ein sehr steiler Abfall des Widerstandes stattfindet, der offenbar parallel geht mit dem Zusammenbruch der Bindungskräfte des festen Atomgitters. Vom Vorhandensein eines kristallinen Zustandes in der Schmelze hingegen ist in diesem Diagramm nichts zu bemerken.

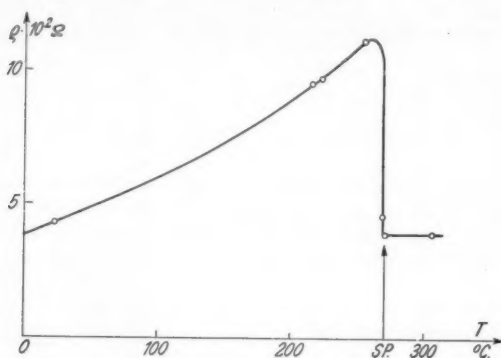


Fig. 5. Widerstand als Funktion der Temperatur eines Bi-P_3 -Kristalls (Strom \parallel Hauptachse)

Das gleiche gilt für den P_3 -Kristalltyp Fig. 5. Auch hier ist der Knick am Schmelzpunkt ausgesprochen scharf; oberhalb des Schmelzpunktes dagegen zeigt sich ein vollkommen glatter Verlauf der Widerstandstemperaturkurve. Auch hier also haben wir keinen Anhaltspunkt, von einem kristallartigen Zustand der Schmelze sprechen zu können.

Wir finden hier bzgl. der elektrischen Leitfähigkeit das gleiche, was auch aus Websters¹⁾ Untersuchungen der diamagnetischen Suszeptibilität des Bi hervorgeht. Webster suchte nach einer kubischen Gitterphase des Bi unmittelbar unterhalb des Schmelzpunktes. Immerhin zeigen aber auch seine Messungen mit Rücksicht auf unser Problem, daß die

1) W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. A 133. S. 162. 1931.

Suszeptibilität am Schmelzpunkt sehr stark variiert, oberhalb desselben dagegen glatt verläuft und keine Veranlassung zur Annahme einer kristallinen Übergangszone in der Schmelze liefert.

2. Die kristallographische Untersuchung

Ein ganz anderes Bild als die elektrische Leitfähigkeit gibt uns dagegen das Kristallisationsverhalten der Proben bei den betrachteten Schmelzprozessen. Experimentell wurde hier folgendermaßen verfahren:

Von einem P_1 - oder P_3 -Kristall wurde ein etwa 2–3 cm langes Stück abgespalten und im Schmelzbett genau in die Mitte des Ofens geschoben. Dann wurde der Ofen bis kurz unterhalb des Schmelzpunktes erhitzt und nun die Temperatur sehr langsam über den Schmelzpunkt gesteigert, z. B. zunächst um 2°C , auf 273°C . (Der Schmelzpunkt von reinem Bi liegt bei etwa 271°C ; eine genaue Schmelzpunktsbestimmung wurde für jede Bi-Probe besonders vorgenommen.) Während längerer Zeit (etwa 30 Min.) wurde die Probe auf dieser Temperatur gehalten, damit ein Temperatúrausgleich gewährleistet war. Jetzt ließ man die Schmelze durch Verminderung des Ofenstromes langsam abkühlen und wieder erstarren.¹⁾ Schließlich wurde bei Zimmertemperatur die kristallographische Orientierung der Probe untersucht.

1) Es ist hier zu bemerken, daß die Schmelzpunktsbestimmung allein kein hinreichendes Kriterium dafür ist, daß der Kristall auch wirklich so dicht über dem Schmelzpunkt schon flüssig war. Man könnte an eine Überhitzung des Kristalls — analog zur Unterkühlung einer Flüssigkeit — denken, so daß er nach Überschreiten des kritischen Schmelzpunktes erst bei einer äußeren Störung (z. B. mechanischer Berührung) oder schließlich bei einer höher gelegenen Grenztemperatur plötzlich flüssig wird. Insofern ist auch die direkte Berührung des Kristalls mit einer kleinen Stahlnadel, zur Feststellung seiner Verflüssigung, als Störung zu bewerten und nicht unbedingt beweisend. Jedoch scheint folgendes Kriterium einwandfrei zu sein:

Nach Fig. 2 (Querschnitt) ist die Oberfläche des Kristalls K gewölbt. Infolge der Volumenabnahme beim Schmelzpunkt ändert sich diese Wölbung beim Übergang in die flüssige Phase und wird hier bestimmt durch die Oberflächenspannung des flüssigen Bi bzw. seine etwas oxydierte Oberflächenschicht. Im allgemeinen ist die Wölbung im flüssigen Zustand geringer als im festen. Diese Abflachung der Metallkuppe beim Flüssigwerden konnte in allen Fällen leicht beobachtet werden und somit als Kriterium dafür dienen, daß der Kristall wirklich flüssig war. Diese Erscheinung trat regelmäßig in unmittelbarer Nähe des Schmelzpunktes (271°C) ein.

Herrn Professor Dr. Precht verdanken wir die Anregung zur Diskussion dieses Kriteriums.

Mit einer gleichen Probe wurde danach ein ebensolcher Prozeß vorgenommen, diesmal aber bis zu einer Maximaltemperatur von etwa 275°C erhitzt und dann abgekühlt; usf. bis zu Maximaltemperaturen, welche um $20\text{--}30^{\circ}\text{C}$ über dem Schmelzpunkt des Bi lagen. Das übereinstimmende Ergebnis der nachfolgenden kristallographischen Analyse war in allen Fällen das Folgende:

Der Kristall zeigt nach dem Erstarren genau die gleiche Orientierung seiner Achsen wie vor dem Schmelzen, sofern die Schmelze eine Temperatur von höchstens 10°C oberhalb des Schmelzpunktes nicht überschritten hat. War die Temperatur dagegen höher, so entsteht nach dem Wiedererstarren eine Kristallorientierung, welche vollkommen willkürlich, manchmal vielkristallin, jedenfalls aber mit der Orientierung des Einkristalls vor dem Schmelzen offensichtlich in keiner Weise mehr verwandt war.¹⁾

Wir haben hier also eine Erscheinung vor uns, die man in der Literatur vielfach als das „Wiedererinnerungsvermögen“ einer Flüssigkeit an einen früher innegehabten Kristallzustand bezeichnet hat. Wir glauben jedoch — und befinden uns damit gewiß in Übereinstimmung mit Boydston, Goetz, Soroos u. a. (vgl. oben) — daß man den Begriff „Wiedererinnerungsvermögen“ nicht mit dem *physikalischen* Prozeß vergleichen kann, welcher die Atome beim Wiedererstarren in denjenigen Lagen festhält, die sie vor dem Schmelzen inne hatten. Wir sehen vielmehr in den hier angestellten Versuchen einen deutlichen Hinweis darauf, daß die Bi-Schmelze in der Nähe des Schmelzpunktes eine Art kristalliner Struktur besitzt, welche bedingt und in ihrer Orientierung bestimmt ist durch die Struktur der vorhergehenden festen Phase. Offenbar verlassen die Bi-Atome nach dem Zusammenbrechen der Bindungskräfte des *festen* Kristallgitters am Schmelzpunkt ihre Plätze nicht spontan, sondern bleiben zunächst an ihnen stehen. Gelingt es dann, durch ein vorsichtiges Erstarrenlassen, sie an diesen Plätzen wieder „einzufangen“, so erhält man eben einen Kristall mit der gleichen Orientierung wie vor dem

1) Wenn man auch von vornherein nicht annehmen kann, daß die kristalline Struktur der Schmelze infolge eines durchgehenden Stromes zerstört werden würde und so das negative Resultat der Versuche des § 1 zu erklären sei, so wurden doch Kontrollversuche in dieser Richtung unternommen. Es ergab sich dabei, wie zu erwarten war, daß ein Stromdurchgang die Kristallisationsverhältnisse in keiner Weise störte, also offenbar auch auf eine kristalline Struktur der Schmelze ohne Einfluß war.

Schmelzen. Stört man dagegen ihre Lagen in der flüssigen Phase durch Erschütterungen oder eine allzustarke thermische Bewegung, so verlassen sie jetzt ihre Plätze, und es tritt der normale, ungeordnete Zustand der Flüssigkeit ein. Eine Temperatur von $8-10^{\circ}\text{C}$ oberhalb des Schmelzpunktes scheint hier die kritische Grenze zu bilden.

Diese Erscheinungen treten in gleicher Weise bei P_1 - und P_2 -Kristallen auf. Sie sind nicht nur für die trigonale (Haupt-)Achse (111) gültig, sondern, wie die mikroskopische Untersuchung zeigt, ebenso für die Rhomboederachsen des Kristalls. Es bleibt also nicht nur die Lage der Hauptachse bestehen, sondern offenbar auch die der Elementarzelle selbst und damit vermutlich die des einzelnen Atoms.

Man kann also in einem Bi-Kristall eine bestimmte Kristallorientierung selbst dann aufrecht erhalten, wenn man den Kristall unter gewissen Vorsichtsmaßregeln zeitweilig verflüssigt. Während sich aus dem Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit ein einwandfreier Aufschluß nicht ergibt, läßt sich auf Grund der kristallographischen Untersuchung die von Boydston, Goetz und Soroos früher aufgeworfene Frage nach einem kristallinen Zustand der Schmelze offenbar bejahen. Dabei sei besonders darauf hingewiesen, daß wir aus unseren Versuchen nicht nur auf eine *kristalline Struktur* einzelner kleiner Bereiche in der Schmelze schließen, wie sie die Röntgenuntersuchung zunächst ergibt (vgl. Fußnote 3 auf S. 898), sondern darüber hinaus auch auf eine bestimmte *kristallographische Orientierung* aller Bereiche, d. h. eine einkristalline Struktur des ganzen Schmelzgutes.

Es ist nun weiterhin die Frage: Läßt sich dieser kristallartige Zustand nicht in der Schmelze unmittelbar nachweisen? Dieser Weg ist der von Boydston und Soroos bereits beschrittene, der sie zum mindesten qualitativ die Existenz einer Übergangsregion oberhalb des Schmelzpunktes fordern ließ, ohne die Art des kristallinen Zustandes selbst näher zu beleuchten. Es wird zur Zeit im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover in zwei parallel laufenden Arbeiten versucht, auf direktem Wege die kristalline Struktur der Schmelze und ihren kristallographischen Charakter festzustellen. Einmal, wie schon oben erwähnt, mit Hilfe von Röntgenstrahlen. Andererseits soll versucht werden, mittels der Beeinflussung der elektrischen Leitfähigkeit durch starke Magnetfelder einen Aufschluß über den kristallinen Charakter der Schmelze zu bekommen. Wie die letzten Arbeiten des

einen von uns¹⁾ gezeigt haben, besitzt gerade die magnetische Beeinflussbarkeit der elektrischen Leitfähigkeit eines Kristalls die Eigenschaft, daß sich in ihr alle Kristallsymmetrien, welche bisher nur mit Röntgenstrahlen haben ermittelt werden können, vollständig widerspiegeln.

3. Die Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeiten des Bi-Kristalls

Es soll an letzter Stelle hier noch eine Erscheinung behandelt werden, welche mit dem Hauptproblem der Arbeit eng zusammenhängt, und die hier nicht übergangen werden soll, weil sie gerade an Hand der Kurven des § 1 besonders deutlich wird. Es handelt sich um die Ermittlung der elektrischen Anisotropie des Bi-Kristalls.

Wir zeichnen zu diesem Zweck die beiden Kurven der Figg. 4 und 5²⁾ in ein Diagramm zusammen, Fig. 6, und zwar so, daß wir für beide Kurven die Widerstandswerte auf gleichen Querschnitt reduzieren. Das geschieht folgendermaßen:

Wegen der Anisotropie der Leitfähigkeit des Bi im festen Zustande (im P_1 -Kristall geht der Strom senkrecht zur Hauptachse, im P_3 -Kristall parallel zur Hauptachse) können wir die Reduktion nur auf den Leitfähigkeitswert der Schmelze beziehen, und zwar wollen wir die Kurve des P_1 -Kristalls als gegeben zugrunde legen. Dann zeichnen wir die P_3 -Kurve so in das P_1 -Diagramm ein, daß die Widerstandswerte der beiden Schmelzen zusammenfallen. Um denjenigen Prozentsatz, um den wir den Widerstandswert der P_3 -Schmelze dabei ändern mußten, um zu dem P_1 -Wert zu gelangen, ändern wir auch alle anderen Punkte der P_3 -Kurve. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Widerstandstemperatur-Kurve des P_3 -Kristalls, welche auf den gleichen effektiven Querschnitt bezogen ist, wie die zugehörige P_1 -Kurve.³⁾

Wir können jetzt aus diesem Kurvenpaar zwar keine absoluten Werte der spezifischen Leitfähigkeit des Bi-Kristalls parallel und senkrecht zur Hauptachse entnehmen, aber doch *zusammengehörige Paare von Relativwerten*; d. h. aber, wir

1) O. Stierstadt, (I. Teil), *Ztschr. f. Phys.* **80**. 641. 1933; desgl. (II. u. III. Teil) im Druck.

2) Es sei hier darauf hingewiesen, daß ähnliche Kurven, wie die der Figg. 4 und 5 von P. Kapitza, *Proc. Roy. Soc.* **119**. S. 358. 1928 für Bi aufgenommen wurden, jedoch nur mit willkürlichen Proportionalwerten an der Temperatur- und Widerstandsachse.

3) Da für alle Messungen das gleiche Schmelzbett und somit der gleiche Sondenabstand benutzt wurde, ist die effektive Länge der Kristalle in allen Fällen gleich groß.

können durch Verhältnissbildung dieser Relativwerte die Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit des Bi-Kristalls bestimmen. Und zwar finden wir gleichzeitig aus den beiden Kurven den

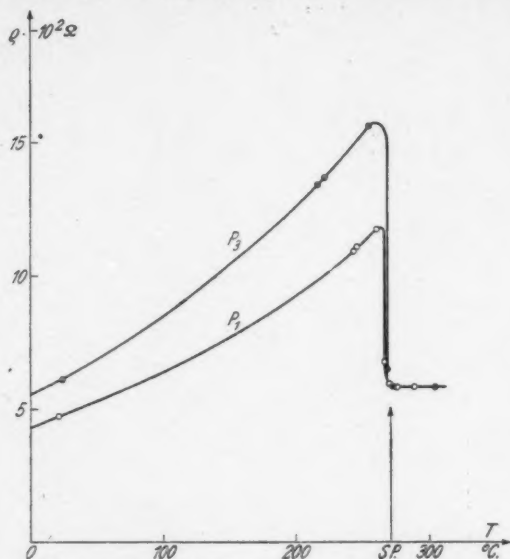


Fig. 6. Widerstände als Funktion der Temperatur von B-P₁- und P₃-Kristallen (Strom \perp und \parallel Hauptachse), auf gleichen Querschnitt reduziert

vollständigen Gang der Anisotropie mit der Temperatur zwischen 0 $^{\circ}$ C und dem Schmelzpunkt.

Bisher sind Bestimmungen der Anisotropieeigenschaften von Kristallen wohl fast ausschließlich¹⁾ so vorgenommen worden, daß man die spezifischen Werte der betr. Eigenschaft parallel und senkrecht zur Hauptachse ermittelte. Es ist bekannt, wie schwierig sich hierbei oft die genaue Messung einzelner benötigter Daten, z. B. des effektiven Querschnitts, gestaltet. Bei dem hier eingeschlagenen Weg kommen alle diese Schwierigkeiten mit der Umgehung der spezifischen Wertebestimmung in Fortfall.

1) Lediglich für Hg ist das hier angegebene Verfahren schon benutzt worden, und zwar von O. Seckell, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 932. 1930, für die elektrische Leitfähigkeit und von H. Reddemann, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 193. 1932, für die Wärmeleitfähigkeit von Hg.

Aus der Fig. 6 ergibt sich als Wert der Anisotropie für die elektrische Leitfähigkeit bzw. den Widerstand ϱ bei 0° C:

$$\alpha = \frac{\varrho_{\parallel}}{\varrho_{\perp}} = 1,27.$$

Dieser Wert steht in bester Übereinstimmung mit anderen Ergebnissen (Landolt-Börnstein, Bridgeman, Borelius und Lindh, Kapitza, Goetz) und zeigt gleichzeitig durch seinen relativ niedrigen Betrag, daß wir es mit besonders reinem Bi¹⁾, bzw. mit besonders gut ausgebildeten Einkristallen zu tun haben. Denn nach Goetz (a. a. O.) vergrößern Verunreinigungen den Widerstand parallel zur Hauptachse stärker

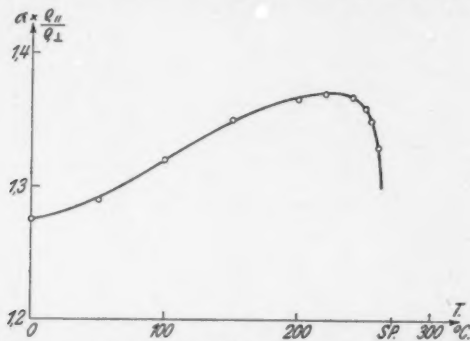


Fig. 7. Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit des Wismutkristalls als Funktion der Temperatur

als senkrecht dazu, und geben somit Veranlassung zu größeren Anisotropiewerten α als sehr reines Material.

Fig. 7 zeigt die Kurve der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeitsanisotropie zwischen 0° C und dem Schmelzpunkt. Zum Schmelzpunkt selbst hin (271° C) muß α sehr steil gegen den Wert 1,0 abfallen. Man sieht einen geringen Anstieg der Anisotropie mit der Temperatur, der über den Temperaturbereich von 0° C bis zum Maximum der Kurve bei 230° C etwa 7% beträgt. Das entspricht einem mittleren Temperaturkoeffizienten der Anisotropie in diesem Gebiet von $K_{0-230} =$

1) Das Bi (Kahlbaum purissimum) wurde vor der Verarbeitung zu Kristallen mehrere Stunden lang bei 500° C im Wasserstoffstrom erhitzt (vgl. A. Goetz, Proc. Nat. Acad. 15. S. 646. 1929).

$3,42 \cdot 10^{-4}$. Zwischen 0 und 100° C beträgt der mittlere Temperaturkoeffizient

$$K = \frac{1}{\alpha_0} \cdot \frac{\alpha_{100} - \alpha_0}{100} = + 3,93 \cdot 10^{-4}.$$

Dieser positive Wert von K deutet weiter darauf hin, daß der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes parallel zur Hauptsache größer sein muß als derjenige senkrecht zur Hauptachse, weil sonst die Anisotropie α nicht mit der Temperatur steigen würde. Leider liegen empirische Vergleichsdaten für diesen Fall nicht vor. Offenbar sind Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit für Bi parallel und senkrecht zur Achse bisher nicht gemessen worden.

Die Anisotropietemperatur-Kurve zeigt zwei bemerkenswerte Erscheinungen:

1. Einen Wendepunkt bei etwa 75° C; das ist gerade die Temperatur des „pseudo-allotropen Umwandlungspunktes“ des Bi. Wegen der zur Zeit noch völlig ungeklärten Bedeutung dieses Punktes verweisen wir auf die Arbeit von A. Goetz und R. C. Hergenrother.¹⁾ Man weiß z. B., daß der thermische Ausdehnungskoeffizient τ an dieser Stelle, makroskopisch (als Längenänderung) gemessen, einen Sprung aufweist, röntgenographisch (als Gitterabstandsänderung) dagegen keine Spur einer Besonderheit zeigt. Zur Erklärung der Diskrepanz dieser beiden τ -Bestimmungen nehmen die Verfasser die Existenz von „dekristallisierten“ Zwischenschichten zwischen den Sekundärblöcken des Gitters an. Diese dekristallisierten Zwischenschichten sind wohl auch für die zweite Besonderheit unserer α - T -Kurve charakteristisch, die Tatsache nämlich, daß

2. die Anisotropie nicht erst unmittelbar vor dem Schmelzpunkt, sondern schon 30 — 40° vorher abzusinken beginnt. Das gleiche Verhalten zeigt z. B. die makroskopisch aufgenommene τ - T -Kurve der beiden obengenannten Verfasser. Man kann diesen Abfall verstehen, wenn man annimmt, daß sowohl die störende Wirkung jener „dekristallisierten“ Schichten auf das Kristallgitter als auch ihr totales Volumen im Kristall mit der Temperatur gegen den Schmelzpunkt hin stark anwächst. Das Postulat eines „scharfen“ Schmelzpunktes, der für einen Kristall am meisten charakteristischen Eigenschaft, steht mit einer solchen Annahme nicht in Widerspruch.²⁾

1) A. Goetz u. R. C. Hergenrother, Phys. Rev. Rev. **40**. S. 643. 1932.

2) F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. **17**. S. 524. 1931.

Wir sehen an den Kurven der Fig. 6 noch folgendes:

Beim P_3 -Kristall beträgt am Schmelzpunkt die Widerstandserhöhung beim Erstarren etwa 2,70, also:

$$\left[\frac{\varrho_{\text{flüss.}}}{\varrho_{\text{fest}}} \right]_{T=271^\circ} = 0,37;$$

von da ab sinkt der Widerstand mit der Temperatur und beträgt bei 0°C nur noch 0,96 des Wertes vom flüssigen Zustand,

$$\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{T=0^\circ} = 1,04.$$

Beim P_1 -Kristall hingegen beträgt am Schmelzpunkt die Widerstandserhöhung nur 2,04, $\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{T=271^\circ} = 0,49$, und es sinkt von da ab der Widerstand mit der Temperatur zu 0°C hin auf das 0,75fache des Wertes der Schmelze, $\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{T=0^\circ} = 1,33$.

Aus den beiden Werten für $\varrho_{\text{fl.}}/\varrho_{\text{f.}}$ am Schmelzpunkt ergibt sich für polykristallines Bi gemäß der Formel:

$$\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{\text{polykrist.}} = \frac{\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{P_3} + 2 \left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{P_1}}{3}$$

als Mittelung über alle Richtungen im Raume der Betrag von:

$$\left[\frac{\varrho_{\text{fl.}}}{\varrho_{\text{f.}}} \right]_{T=271^\circ} = 0,45,$$

der mit der Erfahrung ausgezeichnet in Übereinstimmung steht (Landolt-Börnstein: 0,43—0,47).

Wenn wir für geschmolzenes Bi den spezifischen Widerstand mit $\varrho_{\text{fl.}} = 1,28 \cdot 10^{-4}$ ansetzen (L.-B., allerdings ohne Angabe der Temperatur!), so ergibt sich aus unseren Kurven für den spezifischen Widerstand ϱ_0 bei einer Temperatur von 0°C :

$$\varrho_{0\parallel} = 1,33 \cdot 10^{-4}, \quad \varrho_{0\perp} = 0,98 \cdot 10^{-4},$$

und für die Anisotropie:

$$\alpha_0 = 1,35.$$

Mit Rücksicht auf den unsicheren Wert von $\varrho_{\text{fl.}}$ ist die Übereinstimmung mit direkt gemessenen Werten (L.B.) recht gut.

Das in diesem Abschnitt angegebene Verfahren zur Bestimmung der Anisotropieeigenschaften irregulärer Kristalle ist keineswegs auf die elektrische Leitfähigkeit beschränkt. Man kann ebenso die Anisotropie der magnetischen Suszeptibilität, der Wärmeleitfähigkeit¹⁾, elastischer Konstanten usw. be-

1) Vgl. H. Reddemann, *Ann. d. Phys.* [5] **14**, S. 139. 1932.

stimmen. Ganz allgemein verfährt man dabei folgendermaßen:

Gegeben seien 2 Kristallstäbe P , einer parallel, der andere senkrecht zur Hauptachse gewachsen (P_{\parallel} und P_{\perp}). Es soll die Anisotropie irgendeiner physikalischen Größe σ bei einer bestimmten Temperatur T ermittelt werden. Zu diesem Zweck mißt man zunächst $[\sigma_{\parallel}]_T$ und $[\sigma_{\perp}]_T$, schmilzt dann beide Kristalle auf und bestimmt bei einer Temperatur TS in der Schmelze wieder $[\sigma_{\parallel}]_{TS}$ und $[\sigma_{\perp}]_{TS}$. Nun reduziert man auf gleichen Querschnitt, z. B. den von σ_{\parallel} , d. h. man setzt

$$[\sigma_{\parallel}]_{TS} = c_1 \cdot [\sigma_{\perp}]_{TS}$$

und ändert dann $[\sigma_{\perp}]_T$ um den gleichen Prozentsatz wie $[\sigma_{\perp}]_{TS}$, nämlich um $100(c_1 - 1)\%$. Dadurch wird $[\sigma_{\perp}]_T$ zu $c_2 \cdot [\sigma_{\perp}]_T$, mit $c_1 = c_2 = c$. Die gesuchte Anisotropie α der Eigenschaft σ bei der Temperatur T ist dann:

$$\alpha_{\perp} = \left[\frac{\sigma_{\parallel}}{c \cdot \sigma_{\perp}} \right]_T.$$

Man hat also bei der Verhältnisbildung lediglich den einen σ_{\perp} -Wert mit dem Faktor zu multiplizieren, mit dem man den entsprechenden Schmelzwert σ_{TS} bei der Reduktion auf gleichen Querschnitt multipliziert hatte. Die umständliche Bestimmung der spezifischen Werte für σ hingegen kommt völlig in Fortfall.

IV. Zusammenfassung

1. Es wird, in enger Anlehnung an die Methoden von A. Goetz, ein einfaches Verfahren zur Züchtung und insbesondere zur Impfung von Metalleinkristallen beschrieben. Charakteristisch ist für dieses Verfahren gegenüber allen bisherigen, daß der wachsende Kristall während aller Wachstums- und Impfprozesse vollkommen unbewegt und unberührt bleibt. Dadurch werden Erschütterungen, Drucke u. dgl. am Gitter des wachsenden Kristalls weitgehend ausgeschaltet.

2. Auf der Suche nach Anhaltspunkten für die Annahme einer kristallinen Struktur der Bi-Schmelze unmittelbar oberhalb des Schmelzpunktes führt die Messung der elektrischen Leitfähigkeit über den Schmelzprozeß hin zu dem Ergebnis, daß man aus direkten Leitfähigkeitsmessungen Aussagen über eine Struktur der Schmelze nicht gewinnen kann. Dieser Befund ist, wie durch Kontrollversuche nachgewiesen wird, nicht etwa darin begründet, daß der Stromdurchgang bereits die Struktur der Schmelze zerstörte.

3. Schmilzt man hingegen einen Bi-Kristall vorsichtig auf — bis zu höchstens 10°C über den Schmelzpunkt — und läßt ihn dann wieder langsam abkühlen, so zeigt er nach dem Erstarren die gleiche kristallographische Orientierung wie vor dem Schmelzen. Es wirkt also gewissermaßen der feste Kristall vor dem Schmelzen als Impfkristall für den beim Wiedererstarren entstehenden neuen Kristall. Diese Impfwirkung über die Zeit des Bestehens einer flüssigen Phase weist darauf hin, daß der Schmelze selbst eine kristalline Struktur und eine bestimmte kristallographische Orientierung zuzusprechen ist, und zwar die jeweilige der festen Phase, aus der sie entsteht.

4. Es wird ein bereits von O. Sckell und H. Reddemann benutztes Verfahren entwickelt, die Anisotropie physikalischer Eigenschaften irregulärer Kristalle zu bestimmen. Die umständliche und zeitraubende Ermittlung der *spezifischen* Werte, die man zur Anisotropiebestimmung bisher benutzte, fällt dabei ganz fort. Es sind lediglich für beide Kristallrichtungen je zwei gewöhnliche Messungen der zu untersuchenden Eigenschaft (σ) auszuführen, deren Verhältnis — nach einer einfachen Reduktion auf gleichen Querschnitt — die Anisotropie unmittelbar angibt.

Zum Schluß möchten wir nicht versäumen, den Herren Prof. Dr. J. Precht, Hannover und Prof. Dr. M. Reich, Göttingen für die Durchsicht der Arbeit und ihre wertvollen Beratungen unseren ergebensten Dank auszusprechen. Herrn Prof. Dr. E. Fues, Hannover sind wir für manche anregende Diskussion ebenfalls zu großem Dank verpflichtet.

Hannover,
Physikalisches Institut
der Technischen Hochschule

Göttingen,
Institut f. angew. Elektrizität
der Universität

(Eingegangen 2. Juni 1932)

Messung der Radialschwingungen von Aluminiumkegelschalen

Von A. Th. van Urk und G. B. Hut

(Naturkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven (Holland))

(Mit 3 Figuren)

Einleitung und Zusammenfassung

Im ersten Teil seiner „Theory of Sound“ hat Lord Rayleigh eine Methode zur Berechnung der Eigenschwingungen dünner Schalen angegeben. Der vorhergehende Aufsatz enthält eine Anwendung dieser Methode auf diejenigen Eigenschwingungen (Radialschwingungen) einer Kegelschale, wobei keine Dehnung auftritt. Wir haben untersucht, ob die von Strutt erhaltenen Formeln mit dem Experiment übereinstimmen. Das Ergebnis ist negativ. Die experimentellen Frequenzkurven zeigen eine systematische Differenz, den berechneten gegenüber. Lord Rayleigh hat bemerkt, daß seine Theorie eigentlich nicht auf Schalen *endlicher* Dicke anwendbar ist, sondern nur auf unendlich dünne Schalen. Wir haben aus diesem Grunde die Eigenschwingungen von Schalen verschiedener Dicke untersucht. Die Differenz zwischen Theorie und Experiment nimmt aber bei abnehmender Schalendicke nicht ab.

Meßmethode

Die Kegelschalen wurden aus dünnem Aluminiumblech angefertigt und entlang einer schmalen Naht elektrisch geschweißt. Auf dieser Naht, ungefähr auf ein Drittel der Erzeugenden, vom äußeren Rand gerechnet, wurde an der Außenfläche ein kleines Eisenstückchen angeordnet. Gegenüber diesem Eisenstückchen befand sich ein kleiner Magnetstab, mit einer Spule bewickelt. Durch die Spule wurde Wechselstrom variabler Frequenz gesandt. Auf diese Weise konnten die verschiedenen Eigenschwingungen der Kegelschale angeregt werden.

Auf der Innenfläche der Kegelschale, deren Achse vertikal stand, wurde Pulver gestreut. Wir haben die Zusammenstellung dieses Pulvers so gewählt, daß es an der Kegelfläche haftet, solange sie ruht, sogar bei sehr steilen Kegeln. Wenn jedoch die Kegelfläche in einer Eigenfrequenz schwingt, bewegt sich das Pulver teilweise abwärts, zum anderen Teil seitwärts nach den Knotenlinien. Das Pulver bewegt sich dann entlang den Knotenlinien langsam abwärts. Wenn genug Pulver am oberen Kegelrand gestreut worden ist, erscheinen die Knotenlinien nach kurzer Zeit ganz scharf. Die Eigenfrequenzen sind den Frequenzen des erregenden Wechselstroms gleich. Wir haben als Kontrolle auch noch einen Großlautsprecher unmittelbar über die Kegelschale gehalten und so die Eigenfrequenzen bestimmt. Es ergaben sich genau die gleichen Frequenzen wie mit dem Magneten.

Messungen

1. Kegelschalen verschiedener Dicke und mit sonst gleichen Abmessungen

Die Dimensionen waren (vgl. Fig. 1): $a = 8,80$ cm; $b = 2,45$ cm; $\beta = 57,5^\circ$; $l_1 = 1,56$ cm; $l_2 = 5,61$ cm; $l_1 = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$;

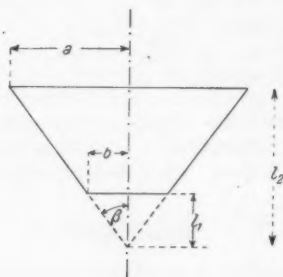


Fig. 1.

$l_2 = \frac{a}{\operatorname{tg} \beta}$. Die Dicke $2d$ der 5 verwendeten Schalen war: $2d_1 = 0,020$ cm; $2d_2 = 0,0114$ cm; $2d_3 = 0,0078$ cm; $2d_4 = 0,0064$ cm; $2d_5 = 0,0042$ cm. Unsere Meßergebnisse sind in der nachfolgenden Tab. 1 zusammengestellt worden.

Tabelle 1. Eigenfrequenz (Hz)

Zahl der Radial- knoten	$2 d_1$ = 0,020	$2 d_2$ = 0,0114	$2 d_3$ = 0,0078	$2 d_4$ = 0,0064	$2 d_5$ = 0,0042
4	250	150	120	—	—
6	485	225	180	160	140
8	720	340	270	200	160
10	1000	525	410	280	210
12	1120	695	530	400	280
14	1190	790	620	470	360
16	—	860	680	550	—
18	—	910	740	610	—
20	—	970	780	680	—
22	—	1060	—	770	—
24	—	1130	870	840	—

Die Fig. 2 illustriert Tab. 1 und 1a.

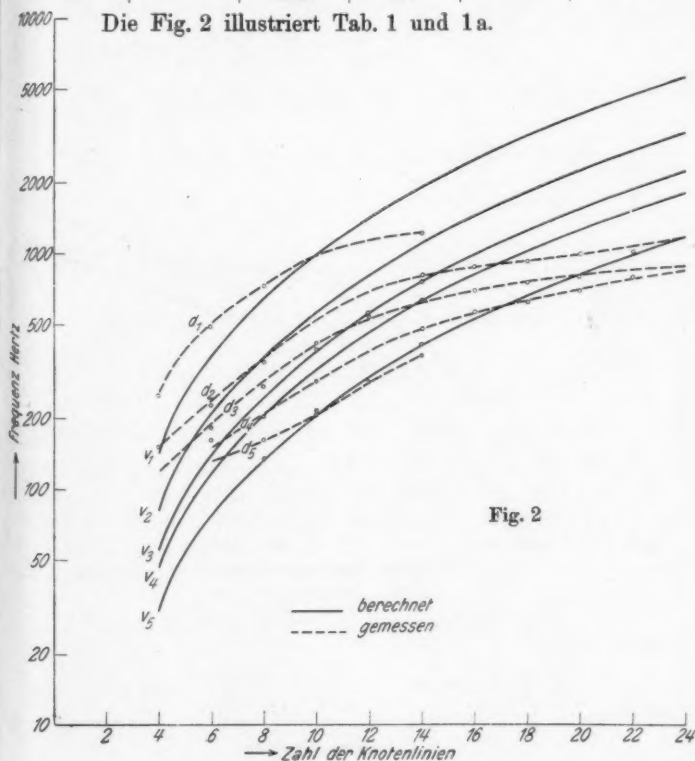
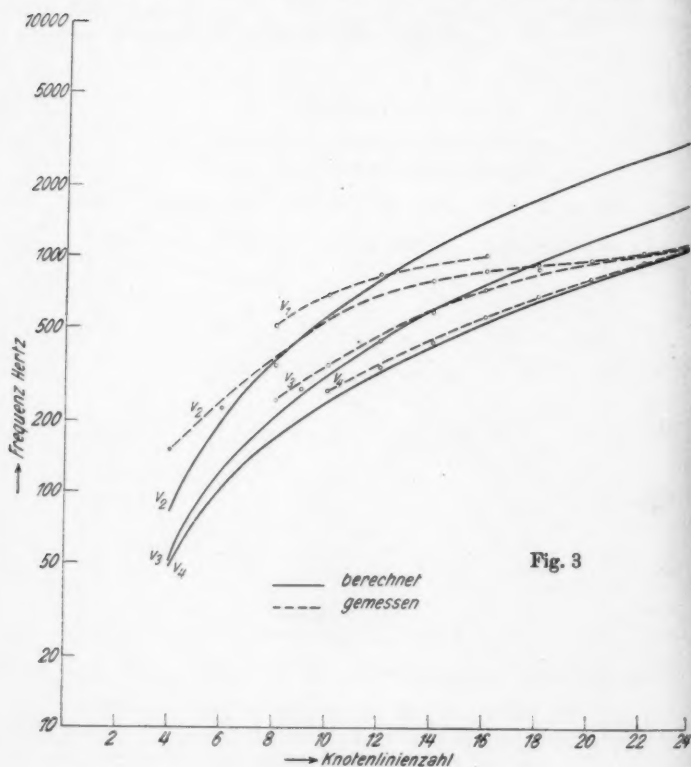


Fig. 2

Tabelle 2. Eigenfrequenz (Hz)

Zahl der Radialknoten	$b = 0$	$b = 2,45 \text{ cm}$	$b = 3,9$	$b = 5,3$
4	—	150	—	—
6	—	225	—	—
8	500	340	240	—
10	680	525	340	270
12	830	695	440	340
14	—	790	580	430
16	1000	860	720	550
18	—	910	890	680
20	—	970	960	820
22	—	1060	1040	950
24	—	1130	1120	1090



2. Kegelschale mit verschiedenem l_1 (vgl. Fig. 1)

Bei der Kegelschale mit $2d_3 = 0,0114$ cm haben wir vier verschiedene Werte von $l_1 = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$ benutzt (vgl. Tab. 2).

Tabellen 2 und 2a werden durch Fig. 3 wiedergegeben.

Vergleich mit der Theorie

Die Theorie wurde benutzt mit der Annahme, daß für l_2 , d. h. am oberen Rande, keine Deformation der Schale stattfindet. Für die Ableitung verweisen wir auf den vorhergehenden Aufsatz von Strutt. Im Experiment waren die Kegelschalen am oberen Rande festgehalten.

Die verwendeten Formeln lauten:

$$\omega_1^2 = (2\pi\nu)^2 = \frac{n(2d)^2}{3\rho l_1^4 \operatorname{tg}^3 \beta} \frac{F_1}{G_1};$$

$$F_i = \frac{m}{m+n} \frac{(i^3 - i^2)}{\sin^2 \beta} \left\{ \ln x + 2(1-x) - \frac{1}{2}(1-x^2) \right\} \\ - \frac{\cos^4 \beta}{2}(1-x^2) + 2i^2 \cos^2 \beta (1-x^2) + i^4 \ln x \\ x_F = \frac{l_2}{l_1};$$

$$G_i = (i^2 + 1) \left\{ \frac{1}{4}(1-x^4) - \frac{2}{3}(1-x^3) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right\} \\ + \operatorname{tg}^2 \beta \left[\frac{1}{2i^2}(1-x^2) + \frac{i^2}{4}(1-x^4) + \frac{i^2}{2}(1-x^2) \right. \\ \left. - \frac{2}{3}i^2(1-x^3) + \frac{2}{3}(1-x^3) - (1-x^2) \right] \quad x_G = \frac{l_1}{l_2}.$$

Hierbei ist r die Steifheit ($6,4 \cdot 10^{11}$), ferner $\frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}(1-\sigma)$, wo σ die Poissonkonstante (0,3) bezeichnet, ρ die Materialdichte (2,7) und i die Hälfte der Radialknotenanzahl. Da die Schalen alle im ersten Falle gleiche Dimensionen und nur variable Dicke haben, ist in den obigen Formeln F_i/G_i konstant für alle 5 Schalen und wir erhalten:

$$\nu_1 = 11,8 \sqrt{\frac{F_1}{G_1}}$$

$$\nu_3 = 4,60 \sqrt{\frac{F_3}{G_3}}$$

$$\nu_2 = 6,72 \sqrt{\frac{F_2}{G_2}}$$

$$\nu_4 = 3,78 \sqrt{\frac{F_4}{G_4}}$$

$$\nu_5 = 2,48 \sqrt{\frac{F_5}{G_5}}$$

Hieraus ergeben sich die nachfolgenden, mit den Messungen von Tab. 1 zu vergleichenden theoretischen Werte für die Eigenfrequenzen.

Tabelle 1a

i	$\sqrt{\frac{F_i}{G_i}}$	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5
2	11,9	140	80	54,7	45,0	29,5
3	30,7	362	206	141	116	76
4	53,8	635	361	247	203	133
5	82,9	975	557	381	313	205
6	118,4	1390	795	544	447	293
7	161	1900	1080	740	608	400
8	209	2470	1400	960	790	518
9	264	3110	1770	1210	1000	655
10	325	3840	2180	1500	1230	800
11	393	4630	2640	1800	1490	975
12	466	5500	3130	2140	1760	1155

Wie zu ersehen aus Fig. 2, nimmt die Differenz zwischen den Zahlen der Tabellen 1 und 1a nicht ab bei abnehmender Dicke.

Für den zweiten durchgemessenen Fall einer Kegelschale mit variabler Öffnung (Tab. 2) erhielten wir folgende Rechenergebnisse:

Tabelle 2a

i	$b = 2,45$	$b = 3,9$	$b = 5,3$
2	80	51	48
3	206	124	108
4	361	206	163
5	557	310	230
6	795	437	310
7	1080	587	405
8	1400	760	505
9	1770	955	640
10	2180	1170	780
11	2640	1410	930
12	3130	1680	1075

Der Fall $b = 0$ kann nicht mit den von Strutt abgeleiteten Formeln durchgerechnet werden.

Eindhoven, den 18. Mai 1933

(Eingegangen 14. Juni 1933)

ungen
ir die

ν_0

29,5
76
33
205
293
400
18
55
400
75
55

n den
Dicke
schale
chen-

abge-

Gr

Zeitsc
verdie
angab
zu ve
festzu
Zaude

Ein

Zeitsc
Stoff
Anme
dar, s

Da

Die H
Jahre
in die
der A

JOH

Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe

von Dr. Siegfried Czapski†, Jena und Dr. Otto Eppenstein, Jena.

Dritte Auflage. Bearbeitet von den wissenschaftlichen Mitarbeitern der Zeissischen Werkstätte Dr. Hans Boegehold, Dr. Otto Eppenstein, Dr. Heinr. Erfle†, Dr. Albert König, Prof. Dr. Moritz v. Rohr.

Herausgegeben von Dr. Heinrich Erfle† und Dr. Hans Boegehold.
XX, 747 Seiten mit 316 Abbildungen im Text. 1924. gr. 8°.

RM. 30.—, geb. RM. 33.—

abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 27.—, geb. RM. 29.70

(Früher „Winkelmanns Handbuch der Physik“, 2. Auflage, Band IV, 1. Teil)

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Die äußere Redaktion des innerlich so wertvollen Werkes verdient alle Anerkennung. Mustergültig sind die übersichtlichen und reichen Literaturangaben und das Register. Überall tritt das Bestreben zutage, die historische Entwicklung zu verfolgen und mit peinlichster Sorgfalt das erste Auftreten neuer Konstruktionsideen festzustellen. . . . Wir freuen uns aufrichtig über das vorliegende Buch, das man ohne Zaudern zu den Zierden der deutschen wissenschaftlichen Literatur zählen darf.

Einführung in die Theorie der optischen Instrumente

von E. T. Whittaker, F. R. S., Hon. SC. D. (Dublin), Professor an der Universität Edinburgh.

Ins Deutsche übertragen nach der zweiten Auflage von „The Theory of Optical Instruments“ und mit Anmerkungen versehen von Dr. phil. Alfred Hay, wissenschaftliche Hilfskraft der Technischen Hochschule Wien. VI, 104 Seiten mit 43 Abbildungen im Text. 1926. 8°. RM. 6.—, abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 5.40

Zeitschrift für technische Physik: Es ist keine kleine Leistung, auf so wenig Seiten so viel Stoff zusammenzubringen und doch stets auch dem Anfänger verständlich zu bleiben. Die Anmerkungen des Übersetzers stellen ferner eine sehr wesentliche Verbesserung des Originals dar, so daß das Büchlein sehr warm empfohlen werden kann.

F. Jentzsch

Das Spiegelteleskop in der Astronomie

Geschichtliche Darstellung der wissenschaftlichen Wertung und technischen Herstellung der Spiegelteleskope sowie leichtfahliche Anleitung zur Selbsterstellung kleinerer Spiegelteleskope für Liebhaberastronomen

von Dr. Eugen v. Krudy, Budapest und Prof. Dr. A. v. Brunn, Potsdam.

Zweite, wesentlich umgearbeitete Auflage. IX, 118 Seiten mit 59 Figuren im Text u. 3 Tafeln. 1930. gr. 8°. RM. 9.—, geb. RM. 11.—
abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 8.10, geb. RM. 9.90

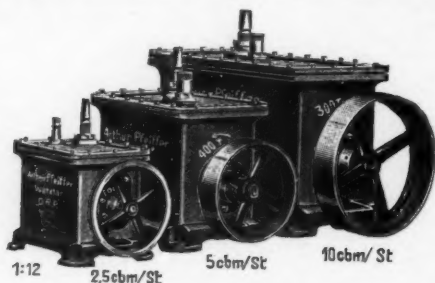
Die Himmelswelt: Das Werk hat trotz seines reichlich speziellen Inhaltes sich doch in wenigen Jahren so viele Freunde erworben, daß sich eine Neuauflage als wünschenswert erwies. Schon in dieser Tatsache liegt ein sehr günstiges Urteil. Wir möchten das Werk allen Freunden der Astronomie und kosmischen Physik bestens empfehlen.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Pfeiffer's

Röntgen-Ölluftpumpen

mit **wiederum** erhöhter Saugleistung
DRP., aus Eisen, ohne Ölrückschlag



Große Saugleistung bis **10 cbm/st**
in **einem** Pumpkörper

Hohes Vakuum . . . bis 10^{-5} mm Hg

Außerdem

Hochvakuumumpumpen

für wissenschaftliche und technische Arbeiten

Saugleistungen 1—250 cbm/st

Vakua $1-10^{-6}$ mm Hg

ARTHUR PFEIFFER, WETZLAR 1

FABRIK PHYSIKALISCHER APPARATE

Gegründet 1890

Gegründet 1890

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Bernhard v. Ammon, Leipzig C 1, Salomonstraße 18 b
Printed in Germany Metzger & Wittig, Leipzig

en

iten

R I

1890



e 18 b
eipzig